

# Элементарная математика в примерах и задачах (обучающий модуль). Часть 1

Ерусалимский Я.М., Чернявская И.А., Дыбин В.Б.,  
Спинко Л.И., Авдейчик А.Г., Мермельштейн Г.Г.

10 декабря 2007 г.

$N$	множество натуральных чисел
$Z$	множество целых чисел
$Q$	множество рациональных чисел
$R$	множество действительных чисел
$\emptyset$	пустое множество
$a \in M$	элемент $a$ принадлежит множеству $M$
$a \notin M$	элемент $a$ не принадлежит множеству $M$
$M_1 \cup M_2$	объединение множеств $M_1$ и $M_2$
$M_1 \cap M_2$	пересечение множеств $M_1$ и $M_2$
$M_1 \setminus M_2$	разность множеств $M_1$ и $M_2$ , т.е. множество элементов $a$ таких, что $a \in M_1$ и $a \notin M_2$
$[a, b]$	замкнутый промежуток(отрезок, сегмент) с началом в $a$ и концом в $b$
$(a, b)$	открытый промежуток(интервал)с началом в $a$ и концом в $b$ . Промежутки $[a, b)$ и $(a, b]$ имеют соответствующий смысл

$$\{\pi k, k \in \mathbb{Z}\} = \{\dots, -3\pi, -2\pi, -\pi, 0, 2\pi, 3\pi, \dots\}$$

$A \Rightarrow B$  из  $A$  следует  $B$

$A \Leftrightarrow B$   $A$  равносильно  $B$ , т.е. из  $A$  следует  $B$  и из  $B$  следует  $A$

ОДЗ область допустимых значений переменной(ых) для функции, ура

▲ и ▼ начало и конец решения (доказательства, утверждения)

## ЧИСЛОВЫЕ ФУНКЦИИ

Пусть  $X$  — числовое множество ( $X \subset R$ ). На множестве  $X$  определена числовая функция  $y = f(x)$ , если каждому элементу  $x$  из множества  $X$  поставлено в соответствие действительное число, обозначаемое  $f(x)$ . Множество  $X$  называется областью определения функции  $f$ , а  $x$  — ее аргументом. Множество  $Y = \{f(x), \text{ где } x \in X\}$ , состоящее из всех значений  $f(x)$  функции  $f$ , когда  $x$  пробегает ее область определения  $X$ , называется множеством значений функции  $f$ .

Если функция  $f$  задана формулой и при этом ничего не сказано о ее области определения, то считается, что функция определена на множестве тех значений аргумента, для которых указанные формулой действия выполнимы (т.е. формула имеет смысл). Множество всех таких значений аргумента называется естественной областью определения функции  $f$  и обозначается  $D(f)$  или просто  $D$ . Множество значений в этом случае обозначается  $E(f)$  или  $E$ .

**Пример 1.** Найти  $D(f)$  и  $E(f)$  для функции  $y = f(x) = |x| + \frac{1}{|x|}$ .

▲ Ясно, что  $D(f) = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ . Для определения  $E(f)$  заметим, что все значения функции  $f$  неотрицательны. Найдем все неотрицательные числа  $a$ , для которых уравнение  $f(x) = a$  разрешимо. Они и будут составлять множество  $E(f)$ . Уравнение  $|x| + \frac{1}{|x|} = a$  равносильно квадратному уравнению  $|x|^2 - a|x| + 1 = 0$ . Сделаем в нем замену  $|x| = t$  и выясним, при каких неотрицательных значениях  $a$  уравнение  $t^2 - at + 1 = 0$  имеет хотя бы один положительный корень. Требование разрешимости последнего уравнения приводит к условию неотрицательности его дискриминанта  $\Delta = a^2 - 4 \geq 0$ . Если это условие выполнено, то один из корней  $t_{1,2} = \frac{a \pm \sqrt{\Delta}}{2}$  уравнения заведомо положителен. В итоге получаем, что уравнение  $f(x) = a$  разрешимо для тех и только тех  $a$ , которые удовлетворяют неравенствам  $a \geq 0$  и  $a^2 \geq 4$  т.е.  $a \in [2, +\infty)$ . Таким образом  $E(f) = [2, +\infty)$ . ▼

## ГРАФИК ФУНКЦИИ

### График функции

Графиком числовой функции  $y = f(x)$  называется множество точек координатной плоскости вида  $M(x, f(x))$ , где  $x$  пробегает область определения функции  $f(x \in X)$ . Не каждое множество точек координатной плоскости является графиком некоторой функции. Для того чтобы такое множество точек было графиком некоторой функции  $y = f(x)$ , необходимо и достаточно, чтобы любая прямая, параллельная оси ординат, пересекала это множество не более чем в одной точке. При этом совокупность абсцисс всех точек этого множества образует область определения функции  $f$ , а совокупность ординат — множество ее значений.

## ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ГРАФИКОВ

Пусть задан график числовой функции  $y = f(x)$  с областью определения  $X$ . Простейшие преобразования графиков имеют следующий вид:

- а)  $y = -f(x)$  — зеркальное отражение графика функции  $y = f(x)$  относительно оси  $OX$ . Область определения новой функции  $X_1 = X$ .  $X_1 = X = [a, b]$  (рис. 1).

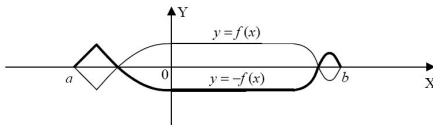
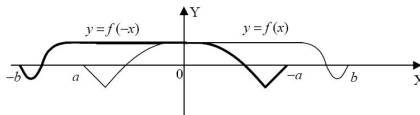


Рис. 1

- б)  $y = f(-x)$  — зеркальное отражение графика функции  $y = f(x)$  относительно оси  $OY$ . Область определения новой функции  $X_1 = -X = \{-x, \text{ где } x \in X\}$ .  $X_1 = -X = [-b, -a]$  (рис. 2).



в)

$$y = |f(x)| = \begin{cases} f(x), & \text{если } f(x) \geq 0, \\ -f(x), & \text{если } f(x) < 0, \end{cases}$$

— зеркальное отражение относительно оси  $OX$  тех частей графика функции  $y = f(x)$ , которые лежат в нижней координатной полуплоскости ( $y < 0$ ), и сохранение тех частей, которые лежат в верхней координатной полуплоскости ( $y \geq 0$ ). Область определения новой функции  $X_1 = X$ .  
 $X_1 = X = [a, b]$  (рис. 3).

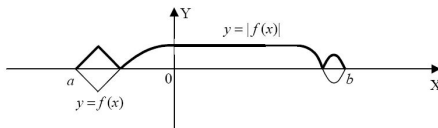


Рис. 3

г)

$$y = f(|x|) = \begin{cases} f(x), & \text{если } x \geq 0, \\ f(-x), & \text{если } x < 0, \end{cases}$$

— сохранение части графика функции  $y = f(x)$ , лежащей в правой координатной полуплоскости ( $x \geq 0$ ), и симметричное отражение этой же части графика относительно оси  $OY$  (четное продолжение в полуплоскость  $x < 0$ ). Область определения новой функции имеет вид  $X_1 = X_+ \cup (-X_+)$ , где  $X_+$  — множество неотрицательных чисел из  $X$ .

$X_1 = [-b, b]$  (рис. 4).

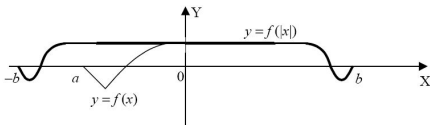


Рис. 4

Если  $X_+ = \emptyset$ , т.е. функция  $y = f(x)$  не определена ни для одного неотрицательного значения  $x$ , функции  $y = f(|x|)$  не существует.

- д)  $y = f(x) + k$ ,  $k \in R$  — параллельный перенос (сдвиг) графика функции  $y = f(x)$  вдоль оси  $OY$  на  $|k|$  вверх, если  $k > 0$ , и вниз, если  $k < 0$ . Область определения новой функции  $X_1 = X$ .  $X_1 = [a, b]$ . (рис. 5)

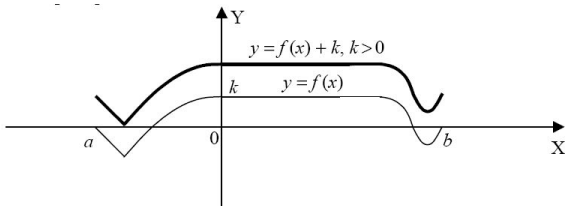


Рис. 5

- е)  $y = f(x + r)$ ,  $r \in \mathbb{R}$  — параллельный перенос (сдвиг) графика функции  $y = f(x)$  вдоль оси  $OX$  на  $|r|$  влево, если  $r > 0$ , и вправо, если  $r < 0$ . Область определения новой функции  $X_1 = -r + X = \{-r + x, \text{ где } x \in X\}$ .  
 $X_1 = [a - r, b - r]$  (рис. 6).

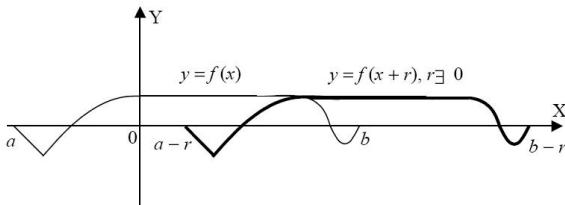


Рис. 6

ж)  $y = \beta f(x)$ ,  $\beta > 0$  — растяжение графика функции  $y = f(x)$  вдоль оси  $OY$  с коэффициентом  $\beta$ , если  $\beta > 1$ , и сжатие с коэффициентом  $\frac{1}{\beta}$ , если  $0 < \beta < 1$ . Область определения новой функции  $X_1 = X$ .  $X_1 = [a, b]$  (рис. 7).

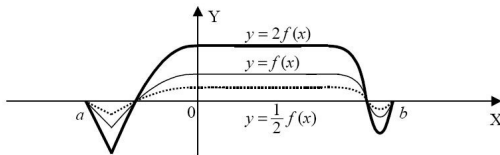


Рис. 7

- з)  $y = f(\alpha x)$ ,  $\alpha > 0$  — сжатие графика функции  $y = f(x)$  вдоль оси  $OX$  с коэффициентом  $\alpha$ , если  $\alpha > 1$ , и растяжение с коэффициентом  $\frac{1}{\alpha}$ , если  $0 < \alpha < 1$ . Область определения новой функции

$$X_1 = \frac{1}{\alpha} X = \left\{ \frac{x}{\alpha}, \text{ где } x \in X \right\} \text{ (рис. 8).}$$

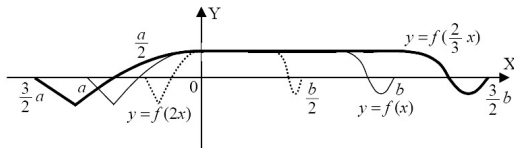


Рис. 8

- и) Общее линейное преобразование графика, определяемое функцией  $y = \beta f(\alpha x + r) + k$ , распадается в композицию элементарных преобразований, описанных в пунктах а ), б ), д ) — з).

**Пример 2. а)** Построить график функции  $y = \frac{2x - 1}{x - 1}$ .

▲ Представив данную функцию в виде  $y = 2 + \frac{1}{x - 1}$ , замечаем, что ее область определения  $D = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$ , а ее график может быть получен из графика функции  $y = \frac{1}{x}$  сдвигом его вправо на 1 и вверх на 2. (рис. 9) ▼

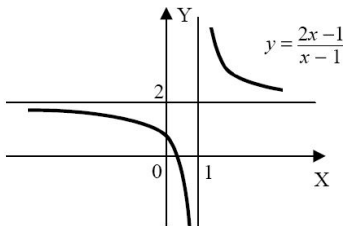


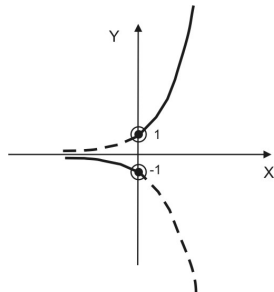
Рис. 9

б) Построить график функции  $y = \frac{x \cdot 2^x}{|x|}$ .

▲ Область определения функции  $D = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ . Используя определение модуля числа

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{если } x > 0, \\ -x, & \text{если } x < 0, \end{cases}$$

замечаем, что на множестве  $(0; +\infty)$   
нужно построить график функции  
 $y = 2^x$ , а на множестве  $(-\infty; 0)$   
—  $y = -2^x$ . ▼



в) Построить график функции

$$y = \frac{1}{2} (\lg(x^2 - x - 2) + \lg(x + 1) - \lg(x - 2)).$$

▲ Найдем область определения функции:

$$\begin{cases} x^2 - x - 2 > 0, \\ x + 1 > 0, \\ x - 2 > 0, \end{cases} \quad \begin{cases} (x - 2)(x + 1) > 0, \\ x > -1, \\ x > 2. \end{cases}$$

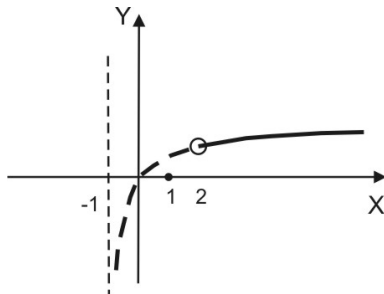
Решением этой системы служит множество  $D = (2; +\infty)$ . Используя формулы потенцирования, зададим функцию формулой

$$y = \frac{1}{2} \lg \frac{(x^2 - x - 2) \cdot (x + 1)}{x - 2}$$

или

$$y = \frac{1}{2} \lg(x + 1)^2.$$

Так как  $\sqrt{(x+1)^2} = |x+1|$ , а на области определения  $D = (2; +\infty)$ ,  $x+1 > 0$ , то окончательно  $y = \lg(x+1)$  с областью определения  $D = (2; +\infty)$ . График этой функции может быть получен из графика функции  $y = \lg x$  сдвигом влево на 1 единицу: ▼



## СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ

### А) Четность и нечетность.

Функция  $y = f(x)$ , определенная на множестве  $X$ , называется четной (нечетной), если:

- а) множество  $X$  симметрично относительно начала координат;
- б)  $f(-x) = f(x)$  ( $f(-x) = -f(x)$ ) для любых  $x \in X$ .

Для того чтобы функция  $y = f(x)$  была четной, необходимо и достаточно, чтобы ее область определения и график были симметричны относительно оси  $OY$ . Для того чтобы функция  $y = f(x)$  была нечетной, необходимо и достаточно, чтобы ее область определения и график были симметричны относительно начала координат.

### Б) Периодичность функции.

Функция  $y = f(x)$  называется периодической, если существует такое отличное от нуля число  $T$ , что для всех  $x$  из области определения  $X$  этой функции:

- а)  $x - T, x + T \in X$ ;
- б)  $f(x + T) = f(x)$ .

В этом случае число  $T$  называется периодом функции  $y = f(x)$ .

## Простейшие свойства периодических функций

- 1 Пусть  $T$  — период периодической функции  $y = f(x)$ . Тогда  $\pm nT$  — также ее периоды для любых натуральных  $n$ ,  $f(x \pm nT) = f(x)$ ,  $x \in X$ .  
В связи с этим свойством обычно под периодом или наименьшим периодом периодической функции понимают ее наименьший положительный период  $T_0$ , если он существует.
- 2 Если  $T_0$  — наименьший период периодической функции, тогда любой ее период  $T$  имеет вид  $T = \pm nT_0$ , где  $n$  — некоторое натуральное число.
- 3 Существуют периодические функции, не имеющие наименьшего периода. Например, функция  $y = 1$  с областью определения  $R$ .
- 4 Сумма, разность, произведение и частное периодических функций с одинаковым периодом есть функция периодическая.
- 5 Если  $y = f(x)$  — периодическая функция, определенная на множестве  $X$ , с наименьшим периодом  $T_0$  и  $a \in R \setminus \{0\}$ , тогда функция  $y = af(x)$ , определенная на множестве  $X$ , также является периодической, и ее наименьший период равен  $T_0$ , а функция  $y = f(ax)$ , определенная на множестве  $X_1 = \frac{1}{a}X = \left\{ \frac{x}{a}, \text{ где } x \in X \right\}$ , является периодической, и ее наименьший период равен  $|a|^{-1}T_0$ .

Для того чтобы построить график периодической функции с наименьшим периодом  $T_0$ , нужно построить его на каком-нибудь отрезке вида  $[a, a + T_0]$ , а после этого осуществить сдвиг построенной части графика вправо и влево вдоль оси  $OX$  на величины  $nT_0$  где  $n = 1, 2, 3, \dots$ , иначе говоря, осуществить периодическое продолжение вдоль оси  $OX$  с периодом  $T_0$ .

**Пример 3.** Найти наименьший период функции  $y = \sin x + \frac{1}{\sin x}$ .

▲ Естественная область определения этой функции имеет вид  $D = \mathbb{R} \setminus \{\pi k, k \in \mathbb{Z}\}$ . Очевидно, что  $T = 2\pi$  — период этой функции. Покажем, что  $T_0 = 2\pi$ . Пусть  $T_0$  — наименьший период функции  $f$ . Тогда, в частности, для всех  $x$  из  $X$

$$\sin(x + T_0) + \frac{1}{\sin(x + T_0)} = \sin x + \frac{1}{\sin x}.$$

Полагая  $x = \frac{\pi}{2}$ , получаем, что

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + T_0\right) + \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + T_0\right)} = 2,$$

то есть

$$\frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{2} + T_0\right) - 2\sin\left(\frac{\pi}{2} + T_0\right) + 1}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + T_0\right)} = 0.$$

Откуда следует, что  $\sin\left(\frac{\pi}{2} + T_0\right) = 1$ , т.е. числа  $\frac{\pi}{2} + T_0$  могут принимать значения  $\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{9\pi}{2}, \dots$ . Отсюда следует, что  $T_0 = 2\pi$ . ▼

### В) Ограниченность. Наибольшее и наименьшее значения.

Функция  $y = f(x)$ , определенная на множестве  $X$ , называется ограниченной снизу (сверху), если существует такое число  $a$  (число  $b$ ), что  $f(x) \geq a$  ( $f(x) \leq b$ ) для всех  $x$  из  $X$ . Функция  $y = f(x)$  с областью определения  $X$  называется ограниченной, если она одновременно ограничена снизу и сверху,  $a \leq f(x) \leq b$  для всех  $x$  из  $X$ . Ограниченность функции равносильна тому, что ее график лежит в полосе, образованной прямыми  $y = a$  и  $y = b$ , а множество значений  $Y$  является подмножеством отрезка  $[a, b]$ .

**Пример 4.** а) Функция  $y = |\sin x|$  является ограниченной, так множество ее значений  $E = [0, 1]$ .

б) Функция  $y = \frac{1}{x}$  на множестве  $X = (0, \infty)$  является ограниченной снизу,

так как  $\frac{1}{x} > 0$  при  $x \in (0, +\infty)$ , но неограниченной сверху.

в) Функция  $y = -x^2 + 2x - 2 = -(x - 1)^2 - 1$  ограничена сверху, так как  $-x^2 + 2x - 2 \leq -1$  для всех  $x$  из  $R$ , и неограничена снизу.

Говорят, что ограниченная снизу (сверху) функция  $y = f(x)$  с областью определения  $X$  в точке  $x_0$ ,  $x_0 \in X$ , принимает наименьшее (наибольшее) значение  $f(x_0)$ , если для всех  $x$  из  $X$   $f(x) \geq f(x_0)$  ( $f(x) \leq f(x_0)$ ). Например, функция  $y = x^2$  ограничена снизу, так как для всех  $x$  из  $R$   $x^2 \geq 0$ , причем  $0^2 = 0$ , т. е. 0 — наименьшее значение этой функции, принимаемое ею в точке  $x_0 = 0$ .

Функция  $y = \sin x$  является ограниченной, так как для всех  $x$  из  $R$   $-1 \leq \sin x \leq 1$ , причем свое наименьшее значение  $-1$  эта функция принимает на бесконечном множестве  $\{-\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z\}$ , а свое наибольшее значение  $1$  — на бесконечном множестве  $\{\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z\}$ . Существуют ограниченные (ограниченные снизу или сверху) функции, которые не имеют наименьшего или (и) наибольшего значения. Например, функция  $y = \frac{1}{x^2+1}$  ограничена снизу всюду на  $R$ , так как  $E = (0, 1]$ , но не имеет наименьшего значения. Функция  $y = 1 - 2^x$  ограничена сверху всюду на  $R$ , так как  $E = (-\infty; 1)$ , но не имеет наибольшего значения.

**Пример 5.** Найти наименьшее и наибольшее значения, если они существуют, функции  $y = -x^2 + 3x + 1$ .

▲ Выделив полный квадрат, получаем, что

$$f(x) = -x^2 + 3x - 2,5 + 3,25 = -(x - 1,5)^2 + 3,25.$$

Откуда следует, что данная функция ограничена сверху числом  $b = 3,25 = f(1,5)$ ,  $f(x) \leq f(1,5)$ , и неограничена снизу. Таким образом, наибольшее значение функции  $f(1,5) = 3,25$ , а наименьшего значения не существует. ▼

Как следует из предыдущего примера, отыскание наименьшего и наибольшего значений функции, так же, как и выяснение ее ограниченности, связаны с рассмотрением неравенств типа  $f(x) \leq b$ ,  $f(x) \geq a$  или  $a \leq f(x) \leq b$ . В связи с этим отметим, что часто предпочтительным является графический метод решения этих задач.

**Пример 6.** Исследовать на ограниченность функцию  $y = |x + 1| - x$  и найти ее наименьшее и наибольшее значения, если они существуют.

▲ Построим график функции (рис. 10), заметив, что

$$y = |x + 1| - x = \begin{cases} 1, & \text{если } x \geq -1, \\ -2x - 1, & \text{если } x < -1, \end{cases}$$

Из рис. 10 следует, что данная функция ограничена снизу и неограничена сверху. Ее наименьшее значение существует, равно 1, и функция принимает его в каждой точке множества  $[1, +\infty)$ . ▼

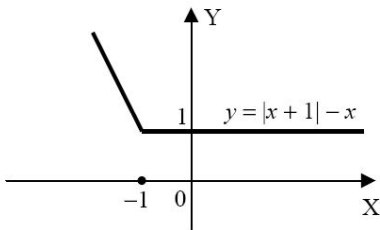


Рис. 10

## ОБРАТНАЯ ФУНКЦИЯ И ЕЕ ГРАФИК

Пусть функция  $y = f(x)$  определена на множестве  $X$ , а множество  $Y$  является множеством ее значений. Говорят, что эта функция осуществляет взаимно-однозначное отображение множества  $X$  на множество  $Y$ , если для любого  $y_0$  из  $Y$  уравнение  $f(x) = y_0$  имеет единственное решение  $x_0$  из  $X$ .

Функция  $y = f(x)$ , определенная на множестве  $X$ , называется монотонно возрастающей (убывающей) на этом множестве, если для любой пары чисел  $x_1$  и  $x_2$  этого множества из неравенства  $x_1 < x_2$  следует, что  $f(x_1) < f(x_2)$  ( $f(x_1) > f(x_2)$ ). Монотонно убывающая или монотонно возрастающая функция на множестве  $X$  называется монотонной на этом множестве.

**Пример 7.** Функция  $y = x^2$  монотонно возрастает на промежутке  $[0, +\infty)$  и монотонно убывает на промежутке  $(-\infty, 0]$ .

▲ Действительно,

$$f(x_1) - f(x_2) = x_1^2 - x_2^2 = (x_1 - x_2)(x_1 + x_2).$$

Откуда получаем, что для любых  $x_1$  и  $x_2$ , удовлетворяющих условию  $0 \leq x_1 < x_2 < \infty$ , верно неравенство  $x_1^2 < x_2^2$ , а для любых  $x_1$  и  $x_2$ , удовлетворяющих условию  $-\infty < x_1 < x_2 \leq 0$ , — неравенство  $x_1^2 > x_2^2$ . ▼

Для того чтобы функция  $y = f(x)$  осуществляла взаимно-однозначное отображение множества  $X$  на множество  $Y$ , необходимо и достаточно, чтобы любая прямая вида  $y = y_0$ , где  $y_0 \in Y$ , пересекала график этой функции ровно в одной точке (рис. 11).

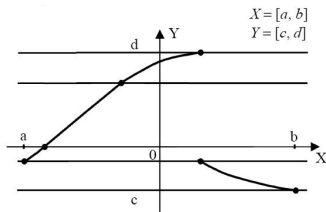


Рис. 11

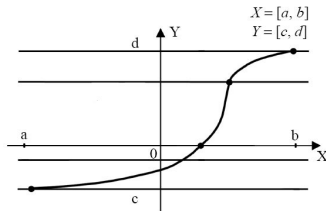


Рис. 12

Заметим, что последнее геометрическое условие выполняется, если функция  $y = f(x)$  монотонна на  $X$  (рис. 12), т. е. определенная на множестве  $X$  и монотонная на этом множестве функция, имеющая множество  $Y$  в качестве множества своих значений, осуществляет взаимно-однозначное отображение множества  $X$  на множество  $Y$ .

Если функция  $y = f(x)$  осуществляет взаимно-однозначное отображение множества  $X$  на множество  $Y$ , т. е. для каждого значения  $y_0$  из  $Y$  существует и притом только одно  $x_0$  из  $X$  такое, что  $y_0 = f(x_0)$ , тогда на множестве  $Y$  определена функция  $x = g(y)$ , которая каждому значению  $y_0$  из  $Y$  ставит в соответствие значение  $x_0$  из  $X$ , являющееся решением уравнения  $f(x) = y_0$ . Ясно, что  $X$  есть множество значений новой функции. В этом случае говорят, что функция  $y = f(x)$  обратима, а функция  $x = g(y)$  является ее обратной функцией. Обратную функцию обозначают символом  $f^{-1}$ . Согласно определению обратной функции выполняются следующие тождества:

$$f(f^{-1}(y)) = y \quad \text{для всех } y \text{ из } Y,$$

$$f^{-1}(f(x)) = x \quad \text{для всех } x \text{ из } X.$$

**Пример 8.** Показать, что функция  $y = f(x) = \frac{x-1}{2x+1}$  обратима на множестве  $D(f)$  и найти обратную функцию  $x = f^{-1}(y)$ .

▲ Заметим, что  $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1/2\}$ . Представив рассматриваемую функцию в виде  $y = \frac{1}{2} - \frac{3/4}{x+1/2}$ , построим ее график путем преобразования графика  $y = 1/x$ . Это преобразование является композицией зеркального отражения относительно оси  $OX$ , сжатия вдоль оси  $OY$  с коэффициентом  $3/4$  и сдвигов вдоль оси  $OY$  вверх и вдоль оси  $OX$  влево на  $1/2$  (см. рис. 13).

Так как любая прямая  $y = a$ , где  $a \in R$ , кроме прямой  $y = 1/2$ , пересекает график ровно в одной точке, функция  $y = f(x)$  обратима и ее множество значений  $E(f) = R \setminus \{1/2\}$ .

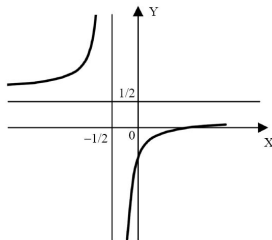


Рис. 13

Найдем аналитический вид обратной функции. Пусть  $y_0 \in E(f)$  и  $x_0$  — решение уравнения  $\frac{x-1}{2x+1} = y_0$ . Тогда  $x_0$  и  $y_0$  связаны равенством  $\frac{x_0-1}{2x_0+1} = y_0$ . Выражая из этого равенства  $x_0$  через  $y_0$  и учитывая при этом, что  $x_0 \neq -1/2$ ,  $y_0 \neq 1/2$ , получаем, что  $x_0 = \frac{y_0+1}{1-2y_0}$ . Следовательно, определенная на множестве  $R \setminus \{1/2\}$  функция  $x = f^{-1}(y)$  имеет вид  $x = \frac{y+1}{1-2y}$ . ▼

Обратим внимание на то, что если функция  $y = f(x)$  обратима, то графики функций  $y = f(x)$  и  $x = f^{-1}(y)$ , изображенные в одной системе координат, совпадают. Однако, часто на практике приходится иметь дело не с функцией  $x = f^{-1}(y)$ , а с функцией  $y = f^{-1}(x)$ . В связи с этим отметим, что график функции  $y = f^{-1}(x)$  в той же системе координат, что и график функции  $y = f(x)$ , является результатом зеркального отражения последнего относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов, т. е. прямой  $y = x$  (рис. 14).

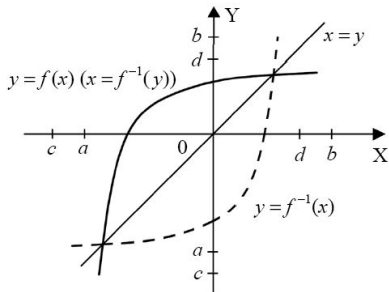


Рис. 14

**Пример 9.** Показать, что функция  $y = f(x) = 3 - x^2$  обратима на множестве  $X = [0, +\infty)$ , найти обратную функцию и построить график функции  $y = f^{-1}(x)$ .

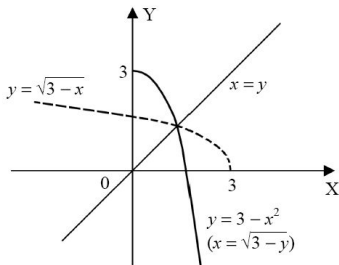


Рис. 15

График функции  $x = \sqrt{3 - y}$  совпадает с графиком функции  $y = 3 - x^2$ , а график функции  $y = \sqrt{3 - x}$  (на рис. 15 он изображен пунктирной линией) является его зеркальным образом относительно прямой  $y = x$ . ▼

▲ Построив график функции  $y = f(x) = 3 - x^2$  (на рис. 15 он изображен сплошной линией), замечаем, что функция обратима на множестве  $X = [0, +\infty)$ . При этом множество ее значений  $Y = (-\infty, 3]$ . Выразая  $x$  через  $y$ , из равенства  $y = 3 - x^2$  получаем, что обратная функция, определенная на множестве  $(-\infty, 3]$ , имеет вид  $x = f^{-1}(y) = \sqrt{3 - y}$  (здесь мы взяли арифметический корень, так как множество значений обратной функции совпадает с промежутком  $[0, +\infty)$ ).

## УГЛЫ И ИХ ИЗМЕРЕНИЕ

Зафиксируем на плоскости точку  $O$  и рассмотрим два луча  $OA$  и  $OB$ , выходящие из точки  $O$  (рис. 16). Они порождают угол — часть плоскости, лежащую между лучами, включая сами лучи. На рис. 16 эта часть заштрихована. Указанный угол мы обозначим дужкой окружности с центром в точке  $O$  и значком  $\alpha$ . Дополнение этого угла до всей плоскости вместе с лучами  $OA$  и  $OB$  также образует угол. Мы его также обозначим дужкой окружности с центром в точке  $O$  и значком  $\beta$ . Углы  $\alpha$  и  $\beta$  называются взаимно дополнительными, их объединение составляет всю плоскость. Если луч  $OB$  направлен в противоположную сторону от луча  $OA$ , тогда углы  $\alpha$  и  $\beta$  называются развернутыми (рис. 17). Каждый из этих углов составляет полуплоскость. Если же лучи  $OA$  и  $OB$  направлены в одну сторону, тогда они сливаются, угол  $\alpha$  есть этот слившийся луч  $OA = OB$ , а угол  $\beta$  совпадает со всей плоскостью (рис. 18) и называется полным углом.

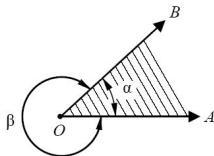


Рис. 16

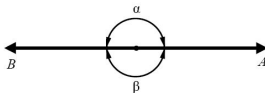


Рис. 17

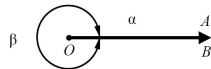


Рис. 18

Существует два способа измерения углов (градусная и радианная меры). Градусная мера полного угла равна  $360^\circ$ , развернутого —  $180^\circ$ . Угол величиной в  $1^\circ$  получается, если полный угол разбить на 360 одинаковых по величине частей лучами, выходящими из точки  $O$ . Если угол величиной в  $1^\circ$  разбить на 60 одинаковых частей, мы получим угол величиной в  $1'$  (одну минуту), а если угол в  $1'$  разбить в свою очередь на 60 одинаковых частей, мы получим угол в  $1''$  (одну секунду). Угол величиной в  $90^\circ$  называется прямым. Это наименьший из двух взаимно дополнительных углов, образованных взаимно перпендикулярными лучами  $OA$  и  $OB$  (рис. 19).

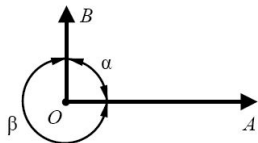


Рис. 19

В этом случае говорят, что  $\alpha = 90^\circ$ . Ясно, что  $\beta = 270^\circ$ . Если лучи  $OA$  и  $OB$  имеют одинаковое направление, то угол  $\alpha = 0^\circ$ . Если совершенно неравенство  $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ , угол  $\alpha$  называется острым, а если  $90^\circ < \alpha < 180^\circ$  — тупым. Отметим, что несмотря на то, что для большинства практических нужд градусная мера углов вполне достаточна, она обладает явным несовершенством.

При переходе к углам, меньшим чем  $1''$ , а такие углы постоянно фигурируют в современной практике (астрономия, космонавтика, физика и т.д.), необходимо прибегать к долям (обычно десятичным) секунды, что сразу демонстрирует неуниверсальность градусной меры.

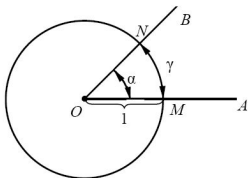


Рис. 20

Проведем окружность единичного радиуса с центром в точке  $O$ . Эта окружность пересекается лучами  $OA$  и  $OB$  соответственно в точках  $M$  и  $N$  (рис. 20). Радианная мера угла  $\alpha$  определяется длиной дуги  $MN$ , на которую этот угол опирается. Приведем теперь определение радианной меры угла.

Углом в один радиан называется угол, который в окружности единичного радиуса является центральным углом, опирающимся на дугу, длина которой равна единице (в окружности радиуса  $R$  он опирается на дугу, длина которой равна  $R$ ). Ясно, что радианная мера полного угла равна  $2\pi$  радиан, прямого угла —  $\pi/2$  радиан. Для того чтобы определить радианную меру  $\gamma$  угла, градусная мера которого равна  $\alpha^\circ$ , необходимо воспользоваться пропорцией

$$\alpha^\circ : 360^\circ = \gamma : 2\pi, \quad \gamma = \frac{\alpha^\circ \cdot 2\pi}{360^\circ} \text{ рад.}$$

Из этой пропорции, в частности, следует, что угол в 1 радиан, т. е. угол, который опирается на дугу  $MN$  длиной в единицу (это длина радиуса), имеет градусную меру

$$\alpha^{\circ} = \frac{360^{\circ}}{2\pi} \approx 57^{\circ}18'.$$

Несколько изменим наш подход. Пусть луч  $OA$  все время остается неподвижным, а луч  $OB$  вращается относительно центра  $O$  как против часовой стрелки — это направление будем называть положительным, так и по часовой стрелке — это направление будем называть отрицательным. В начальном положении, когда луч  $OB$  совпадает с лучом  $OA$ , они составляют угол величиной в  $0^{\circ}$  (или 0 радиан). Пусть теперь подвижный луч отклонился от начального положения, например, так, как показано на рис. 21.

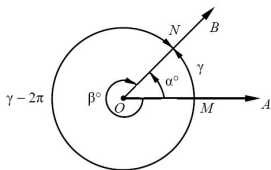


Рис. 21

Для того, чтобы попасть в указанное положение, он должен "пройти" в положительном направлении угол в  $\alpha^{\circ}$  (или  $\gamma = \frac{\alpha^{\circ} \cdot 2\pi}{360^{\circ}}$  радиан), который мы обозначим теперь дужкой окружности с центром в точке  $O$  и стрелкой, указывающей направление движения луча. При таком движении подвижный луч, описывая полный круг и приходя в начальное положение, последовательно образует углы в  $\alpha^{\circ}$  (или  $\gamma$  радиан).

величиной от  $0^\circ$  до  $360^\circ$  (или от 0 до  $2\pi$  радиан). В то же время положение, изображенное на рис. 21, луч  $OB$  может занять, если будет вращаться в отрицательном направлении, отклонившись при этом на угол в  $360^\circ - \alpha^\circ$  (или  $2\pi - \gamma$  радиан). Ввиду того, что этот угол пройден в отрицательном направлении, мы придаем ему значение  $\beta^\circ = -(360^\circ - \alpha^\circ) = \alpha^\circ - 360^\circ$  (или  $\gamma - 2\pi$  радиан). Таким образом, если подвижный луч, двигаясь от начального положения по часовой стрелке, совершит полный оборот, он последовательно образует с неподвижным лучом углы величиной от  $0^\circ$  до  $-360^\circ$  (или от  $0^\circ$  до  $-2\pi$  радиан). При таком подходе подвижный луч может образовывать с неподвижным лучом углы величиной большей  $360^\circ$  (или  $2\pi$  радиан) и меньшей  $-360^\circ$  (или  $-2\pi$  радиан). Для этого он должен совершить более одного оборота в положительном или отрицательном направлении. Например, совершая два с четвертью оборота в положительном направлении, подвижный луч образует с неподвижным лучом угол в  $810^\circ$  (или  $9\pi/2$  радиан). Теперь становится понятным, что угол (он часто называется центральным) может принимать любое действительное значение в градусной или радианной мере. Всюду в дальнейшем мы будем отдавать предпочтение радианной мере угла и в обозначении этой меры слово «радиан» опускать. Поэтому в дальнейшем, например, под углом в  $\pi$  понимается угол в  $\pi$  радиан, а под углом  $\alpha \pm \beta$  понимается угол в  $\alpha \pm \beta$  радиан.

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Особенность задания тригонометрических функций  $u = \sin t$ ,  $u = \cos t$ ,  $u = \operatorname{tg} t$  и  $u = \operatorname{ctg} t$  состоит в том, что их аргументом является величина угла. Эта особенность связана с тем, что тригонометрические функции наиболее естественным образом задаются с помощью так называемого тригонометрического круга. Рассмотрим на плоскости стандартную прямоугольную систему координат и проведем окружность единичного радиуса с центром в начале координат 0 (рис. 22).

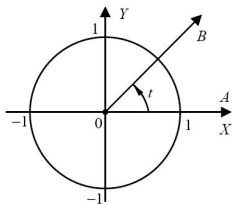


Рис. 22

Неподвижный луч  $OA$  совместим с лучом  $[0, +\infty)$ . Тогда любой угол  $t$ , где  $t \in \mathbb{R}$ , может быть задан путем соответствующего отклонения подвижного луча  $OB$  от начального положения по часовой стрелке ( $t < 0$ ) или против часовой ( $t > 0$ ) стрелки. Как следует из рис. 22, одно и то же положение подвижного луча может быть достигнуто его отклонением от начального положения бесчисленным множеством способов. Все углы, которые задает при этом подвижный луч, могут быть описаны выражением  $\{t + 2n\pi\}$ , где  $n \in \mathbb{Z}$ .

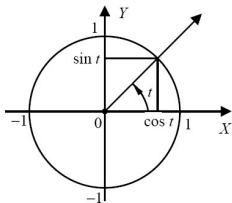


Рис. 23

Обозначим через  $N$  точку пересечения подвижного луча, задающего угол  $t$ , с единичной окружностью. Тогда  $\sin t$  определяется как ордината точки  $N$ , а  $\cos t$  как абсцисса этой точки (рис. 23). Из геометрических соображений ясно, что функции  $u = \sin t$  и  $u = \cos t$  определены всюду на  $R$ , имеют одинаковое множество значений  $E = [-1, 1]$  и являются периодическими функциями с периодом  $T = 2\pi$ :

$$\sin(t + 2\pi) = \sin t, \quad \cos(t + 2\pi) = \cos t, \quad t \in R.$$

Для определения функции  $u = \operatorname{tg} t$  построим прямую  $x = 1$ , которая называется линией (осью) тангенсов (рис. 24). При любом действительном значении  $t$ ,  $t \neq \frac{(2k+1)\pi}{2}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , подвижный луч займет положение одного из четырех указанных на рис. 24 видов в зависимости от того, какой четверти принадлежит угол  $t$ :  $OB$ , если — первой;  $OB'$ , если — второй;  $OB''$ , если — третьей;  $OB'''$ , если — четвертой. Тогда  $\operatorname{tg} t$  определяется как ордината точки пересечения прямой, на которой лежит подвижный луч, с линией тангенсов. При  $t = \frac{(2k+1)\pi}{2}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  функция  $u = \operatorname{tg} t$  не определена. Таким образом, естественная область определения функции  $u = \operatorname{tg} t$  имеет вид:

$$D = R \setminus \left\{ \frac{(2k+1)\pi}{2}, \quad k \in Z \right\},$$

а ее множество значений  $E = R$ . Из определения тангенса следует, что

$$\operatorname{tg}(t + \pi) = \operatorname{tg}(t - \pi) = \operatorname{tg} t, \quad t \in D,$$

т.е. функция  $u = \operatorname{tg} t$  периодическая с периодом  $T = \pi$ . Аналогичным образом для определения функции  $u = \operatorname{ctg} t$  вводится линия (ось) котангенсов — прямая  $y = 1$ , и  $\operatorname{ctg} t$  определяется как абсцисса точки пересечения прямой, на которой лежит подвижный луч, задающий угол  $t$  с линией котангенсов.

Предлагаем читателям самостоятельно построить чертеж и провести соответствующие геометрические построения.

Уверенное владение аппаратом тригонометрических функций является важной составляющей качественной подготовки к обучению в вузе. Здесь, не останавливаясь на стандартных свойствах тригонометрических функций, мы уделим внимание некоторым разделам, способствующим, на наш взгляд, повышению «тригонометрической» культуры абитуриента.

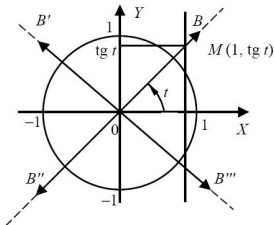


Рис. 24

Целая группа свойств, связанная с оценками тригонометрических функций, является элементарным следствием их определений и хорошо известных свойств окружности и треугольника.

**Пример 10.** Показать, что для всех  $t$  из  $R$  выполняется неравенство

$$|\sin t + \cos t| \leq \sqrt{2}.$$

▲ По определению функций  $u = \sin t$ ,  $u = \cos t$  точка  $N(\cos t, \sin t)$  для любых  $t$  из  $R$  лежит на окружности единичного радиуса с центром в начале координат  $O$  (рис. 23), т.е. пара чисел  $(x, y) = (\cos t, \sin t)$ , удовлетворяет уравнению  $x^2 + y^2 = 1$ . Подставляя в это уравнение  $x = \cos t$ ,  $y = \sin t$ , приходим к так называемому основному тригонометрическому тождеству

$$\cos^2 t + \sin^2 t = 1, \quad t \in R.$$

Теперь воспользуемся тождеством  $\sin 2t = 2 \sin t \cdot \cos t$ ,  $t \in R$  и оценкой  $\sin 2t \leq 1$ ,  $t \in R$ . Ясно, что

$$\cos^2 t + 2 \cos t \cdot \sin t + \sin^2 t = 1 + \sin 2t \leq 2, \quad t \in R,$$

т.е.

$$(\cos t + \sin t)^2 \leq 2, \quad t \in R.$$

Извлекая квадратный корень из последнего неравенства, получаем, что

$$|\sin t + \cos t| \leq \sqrt{2}, \quad t \in R. \quad \blacktriangledown$$

## СВЯЗЬ МЕЖДУ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМИ ФУНКЦИЯМИ ОДНОГО АРГУМЕНТА

Одно из замечательных свойств тригонометрических функций состоит в том, что значения всех тригонометрических функций при данном  $t$  однозначно восстанавливаются по значению одной из них. Источником этого свойства, наряду с основным тригонометрическим тождеством, являются следующие два тождества:

$$\operatorname{tg} t = \frac{\sin t}{\cos t}, \quad t \in R \setminus \left\{ \frac{(2k+1)\pi}{2}, \quad k \in Z \right\},$$

$$\operatorname{ctg} t = \frac{\cos t}{\sin t}, \quad t \in R \setminus \{k\pi, \quad k \in Z\}.$$

В современном школьном курсе математики эти формулы взяты за определение функций  $\operatorname{tg} t$  и  $\operatorname{ctg} t$ . Однако, эти тождества являются простым следствием данных выше определений тангенса и котангенса. Доказательство их справедливости мы предлагаем провести читателю самостоятельно, воспользовавшись подобием  $\triangle ONK$  и  $\triangle OML$  на рис. 25, а также  $\triangle ONK$  и  $\triangle OPS$  на рис. 26.

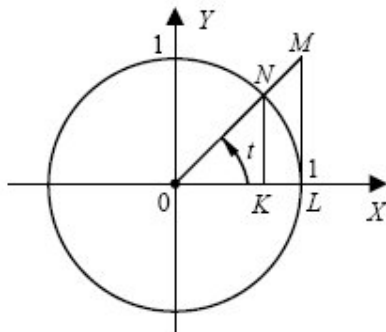


Рис. 25

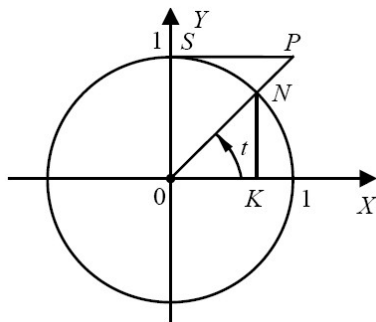


Рис. 26

Формулы, выражающие одни тригонометрические функции через другие, можно свести в таблицу. Обратим внимание на то, что в половине из указанных в таблице двенадцати формул (определите сами в какой!) ОДЗ левой и правой частей различны, и поэтому эти формулы можно использовать лишь на пересечении ОДЗ левой и правой частей. Корень в приведенных формулах имеет арифметическое значение, выбор знака определяется четвертью тригонометрического круга, в которой находится подвижный луч, задающий угол  $t$ , и знаком соответствующей функции в этой четверти.

	$\sin t$	$\cos t$	$\operatorname{tg} t$	$\operatorname{ctg} t$
$\sin t$	$=$	$\pm\sqrt{1 - \cos^2 t}$	$\frac{\operatorname{tg} t}{\pm\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 t}}$	$\frac{1}{\pm\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 t}}$
$\cos t$	$\pm\sqrt{1 - \sin^2 t}$	$=$	$\frac{1}{\pm\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 t}}$	$\frac{\operatorname{ctg} t}{\pm\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 t}}$
$\operatorname{tg} t$	$\frac{\sin t}{\pm\sqrt{1 - \sin^2 t}}$	$\frac{\pm\sqrt{1 - \cos^2 t}}{\cos t}$	$=$	$\frac{1}{\operatorname{ctg} t}$
$\operatorname{ctg} t$	$\frac{\pm\sqrt{1 - \sin^2 t}}{\sin t}$	$\frac{\cos t}{\pm\sqrt{1 - \cos^2 t}}$	$\frac{1}{\operatorname{tg} t}$	$=$

**Пример 11.** Найти  $\cos t$ ,  $\operatorname{tg} t$  и  $\operatorname{ctg} t$ , если  $\sin t = -1/3$ .

▲ Так как синус принимает отрицательные значения в третьей и четвертой четвертях круга, решение распадается на два случая.

1 ) В третьей четверти ( $k\pi < t < \frac{(2k+1)\pi}{2}$ ,  $k = 2n + 1$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ) функция

$u = \cos t$  отрицательна, а функции  $u = \operatorname{tg} t$  и  $u = \operatorname{ctg} t$  положительны.  
Поэтому

$$\cos t = -\sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \frac{-2\sqrt{2}}{3}, \quad \operatorname{tg} t = \left(-\frac{1}{3}\right) : \left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4},$$

$$\operatorname{ctg} t = 1 : \frac{\sqrt{2}}{4} = 2\sqrt{2}.$$

2 ) В четвертой четверти  $\left(\frac{(2k+1)\pi}{2} < t < 2k\pi, k = 2n + 1, n \in \mathbb{Z}\right)$  функция  $u = \cos t$  положительна, а функции  $u = \operatorname{tg} t$  и  $u = \operatorname{ctg} t$  отрицательны. Поэтому

$$\cos t = \frac{2\sqrt{2}}{3}, \quad \operatorname{tg} t = -\frac{\sqrt{2}}{4}, \quad \operatorname{ctg} t = -2\sqrt{2}.$$

Ответ: 
$$\begin{cases} \cos t = -\frac{2\sqrt{2}}{3}, & \operatorname{tg} t = \frac{\sqrt{2}}{4}, & \operatorname{ctg} t = 2\sqrt{2}, \\ \text{если } k\pi < t < \frac{(2k+1)\pi}{2}, & & k = 2n + 1, n \in \mathbb{Z}. \\ \cos t = \frac{2\sqrt{2}}{3}, & \operatorname{tg} t = -\frac{\sqrt{2}}{4}, & \operatorname{ctg} t = -2\sqrt{2}, \\ \text{если } \frac{(2k+1)\pi}{2} < t < 2k\pi, & & \end{cases}$$

## ОБРАТНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Как следует из п. 1.5, ни одна из тригонометрических функций не является обратимой в своей естественной области определения. Ввиду периодичности каждая из этих функций любое свое значение принимает бесчисленное множество раз, когда аргумент пробегает область определения функции. В то же время легко убедиться, и особенно это видно на графиках, что для каждой из этих функций можно выбрать область определения  $X$  таким образом, что будучи суженной на  $X$ , данная тригонометрическая функция осуществляет взаимно-однозначное отображение множества  $X$  на множество своих значений  $Y$  и, следовательно, обратима.

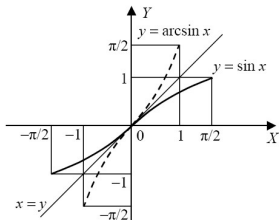


Рис. 27

Вначале рассмотрим функцию  $y = \sin x$  на множестве  $X = [-\pi/2, \pi/2]$ . Из графика этой функции (на рис. 27 он изображен сплошной линией), следует, что при возрастании  $x$  от  $-\pi/2$  до  $\pi/2$  функция  $y = \sin x$  монотонно возрастает, принимая все свои значения от  $-1$  до  $1$ . Но тогда она осуществляет взаимно-однозначное отображение отрезка  $[-\pi/2, \pi/2]$  на отрезок  $[-1, 1]$ .



Эта функция обозначается  $x = \operatorname{arctg} y$  и читается «арктангенс  $y$ ». Согласно определению обратной функции верны следующие тождества:

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} y) = y, \quad y \in R, \quad \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x, \quad x \in (-\pi/2, \pi/2).$$

График функции  $y = \operatorname{arctg} x$  (на рис. 28 он изображен пунктирной линией) симметричен графику функции  $y = \operatorname{tg} x$  относительно прямой  $x = y$ .

? **Предлагаем** читателю самостоятельно рассмотреть функции  $y = \cos x$  на отрезке  $[0, \pi]$  и  $y = \operatorname{ctg} x$  на интервале  $(0, \pi)$ , убедиться в их обратимости и построить обратные функции арккосинус и арккотангенс. Здесь же мы приводим лишь соответствующие тождества.

$$\cos(\arccos y) = y, \quad y \in [-1, 1],$$

$$\arccos(\cos x) = x, \quad x \in [0, \pi],$$

$$\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} y) = y, \quad y \in R,$$

$$\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x) = x, \quad x \in (0, \pi).$$

**! Замечание.** Внимательный читатель заметит, что выбор областей определения для функций  $y = \sin x$  и  $y = \operatorname{tg} x$ , обеспечивающий их обратимость и сохраняющий при этом множества их значений, может быть осуществлен бесчисленным множеством способов, например, при любом целом  $k$

$$X = \left[ \frac{(2k-1)\pi}{2}, \frac{(2k+1)\pi}{2} \right]$$

в первом случае и

$$X = \left( \frac{(2k-1)\pi}{2}, \frac{(2k+1)\pi}{2} \right)$$

— во втором. Возникающие при этом проблемы, обсуждаются в курсе высшей математики. Здесь же отметим, что осуществленный выше выбор областей определения при обращении синуса и тангенса, в первую очередь, обеспечивает описание решений простейших тригонометрических уравнений, рассматриваемых ниже в разделе 9.

Рассмотрим характерный пример, связанный с обратными тригонометрическими функциями.

**Пример 12.** Вычислить значение следующего выражения

$$A = \sin \left[ \arcsin \left( \cos \frac{\pi}{7} \right) + \arcsin \left( \sin \frac{6\pi}{7} \right) + \arcsin \frac{1}{7} \right].$$

▲ Вначале вычислим значения выражений

$$B = \arcsin \left( \cos \frac{\pi}{7} \right) \text{ и } C = \arcsin \left( \sin \frac{6\pi}{7} \right).$$

По формуле приведения

$$\cos \frac{\pi}{7} = \sin \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{7} \right) = \sin \frac{5\pi}{14}.$$

Но тогда

$$B = \arcsin \left( \sin \frac{5\pi}{14} \right) = \frac{5\pi}{14},$$

так как  $5\pi/14 \in [-\pi/2, \pi/2]$ .

Прежде чем приступить к вычислению значения выражения  $C$  заметим, что  $6\pi/7 > \pi/2$  и поэтому

$$\arcsin \left( \sin \frac{6\pi}{7} \right) \neq \frac{6\pi}{7}.$$

Для использования соответствующего тождества необходимо вначале найти на отрезке  $[-\pi/2, \pi/2]$  значение  $x$ , при котором

$$\sin x = \sin \frac{6\pi}{7}.$$

Так как  $\sin \frac{6\pi}{7} = \sin \left( \pi - \frac{\pi}{7} \right) = \sin \frac{\pi}{7}$ , то  $x = \pi/7$ . Следовательно,

$$C = \arcsin \left( \sin \frac{\pi}{7} \right) = \frac{\pi}{7},$$

поскольку  $\pi/7 \in [-\pi/2, \pi/2]$ .

Наконец,  $B + C = \frac{5\pi}{14} + \frac{\pi}{7} = \frac{\pi}{2}$ , т. е.

$$A = \sin \left[ B + C + \arcsin \frac{1}{7} \right] = \sin \left[ \frac{\pi}{2} + \arcsin \frac{1}{7} \right] = \cos \left( \arcsin \frac{1}{7} \right).$$

Теперь воспользуемся формулой

$$\cos x = \pm \sqrt{1 - \sin^2 x}.$$

Так как  $x = \arcsin \frac{1}{7}$  лежит в первой четверти тригонометрического круга, в указанной формуле следует взять знак «+», т.е.

$$A = \sqrt{1 - \left( \sin \left( \arcsin \frac{1}{7} \right) \right)^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{49}} = \frac{4\sqrt{3}}{7}.$$

Ответ:  $A = \frac{4\sqrt{3}}{7}$ . ▼

## АРИФМЕТИЧЕСКИЙ КОРЕНЬ

Пусть  $n \in \mathbb{N}$ . Напомним, что корнем  $n$ -ой степени из вещественного числа  $a$  называется вещественное число  $b$ , такое, что  $b^n = a$ .

### Примеры

- 1 Корень кубический из 8 равен 2.
- 2 Корень четвертой степени из  $-18$  во множестве вещественных чисел не существует, так как 4-я степень любого вещественного числа есть число неотрицательное.
- 3 а. Корень второй степени (квадратный корень) из 4 равен  $-2$ , действительно,  $(-2)^2 = 4$ .
- 3 б. Корень квадратный из 4 равен 2, действительно,  $2^2 = 4$ .
- 4 Корень любой степени из нуля равен нулю.

Примеры 3а, 3б показательны тем, что при извлечении корня четной степени из положительного числа возникает неоднозначность при выборе значения корня. Для того, чтобы снять эту неоднозначность, введено понятие арифметического корня. Арифметическим корнем  $n$ -ой степени из числа  $a$  называется наибольший корень  $n$ -ой степени из числа  $a$ . Для обозначения арифметического корня  $n$ -ой степени из числа  $a$  применяют знак  $\sqrt[n]{a}$ .

## Примеры

⑤  $\sqrt[3]{8} = 2, \sqrt[3]{-8} = -2.$

⑥  $\sqrt{-16}$  не существует во множестве вещественных чисел.

⑦  $\sqrt{4} = 2.$

⑧  $\sqrt[n]{0} = 0, n \in N.$

Очень часто абитуриенты допускают ошибки при нахождении значения арифметического корня, основным источником которых является плохое владением следующим утверждением:

$$\sqrt{a^2} = |a|. \quad (1)$$

Действительно, квадратными корнями из числа  $a^2$  всегда являются как  $a$ , так и  $-a$ . В случае  $a \geq 0$  наибольшим из чисел  $a$  и  $-a$  является  $a$ , значит в этом случае  $\sqrt{a^2} = a$ . Если же  $a < 0$ , то наибольшим из чисел  $a$  и  $-a$  является  $-a$ , значит в этом случае  $\sqrt{a^2} = -a$ . Таким образом, мы получили, что

$$\sqrt{a^2} = \begin{cases} a, & \text{если } a \geq 0, \\ -a, & \text{если } a < 0. \end{cases}$$

Правая часть в последнем равенстве совпадает с определением модуля вещественного числа  $a$ .

Еще одна ошибка, которую допускают абитуриенты, связана с внесением множителя под знак квадратного корня.

Напомним определение знака вещественного числа (сигнума):

$$\operatorname{sign} a = \begin{cases} 1, & \text{если } a > 0, \\ 0, & \text{если } a = 0, \\ -1, & \text{если } a < 0. \end{cases}$$

Ясно, что имеет место равенство

$$a = \operatorname{sign} a \cdot |a|. \quad (2)$$

**Примеры.**

$$\operatorname{sign} 8 = 1, \operatorname{sign} 0 = 0, \operatorname{sign} (-4) = -1, \operatorname{sign} 3 = 1, \operatorname{sign} (\pi - 4) = 1.$$

$$a\sqrt{b} = \text{sign } a \cdot \sqrt{a^2 b}. \quad (3)$$
$$\text{sign } a \cdot \sqrt{a^2 b} = \text{sign } a \cdot |a| \cdot \sqrt{b} = a\sqrt{b}. \blacktriangledown$$


$$\sin x \cdot \sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}} = \operatorname{sign}(\sin x) \sqrt{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} =$$

$$= \begin{cases} \operatorname{tg} x, & \text{если } -\frac{\pi}{2} + 2\pi n < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi n; \\ -\operatorname{tg} x, & \text{если } \frac{\pi}{2} + 2\pi n < x < \frac{3\pi}{2} + 2\pi n \end{cases}$$

Пусть  $a \geq 0, b \geq 0, m \geq 2, n \geq 2, k \geq 2$  ( $m, n, k \in N$ ), тогда

2.  $\sqrt[n]{a} = \sqrt[nk]{a^k}$ ;

4.  $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$  ( $b \neq 0$ );

6.  $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}.$

Сложнее обстоит дело в случае четных показателей. Пусть  $a < 0, b < 0$ , тогда

$$\sqrt[2k]{ab} \neq \sqrt[2k]{a} \cdot \sqrt[2k]{b}$$

так как  $ab > 0$ , то  $a \cdot b = |a \cdot b| = |a| \cdot |b|$ , поэтому

$$\sqrt[2k]{a \cdot b} = \sqrt[2k]{|a| \cdot |b|} = \sqrt[2k]{|a|} \cdot \sqrt[2k]{|b|} = \sqrt[2k]{(-a)} \cdot \sqrt[2k]{(-b)}.$$

$$2k\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{2k\sqrt{(-a)}}{2k\sqrt{(-b)}}.$$

## СТЕПЕНЬ ЧИСЛА

Напомним, что степень числа в курсе школьной математики вводилась постепенным расширением множества возможных показателей степени от множества натуральных чисел до множества вещественных чисел.

Пусть  $n$  — натуральное число ( $n \in N$ );  $n$ -ой степенью вещественного числа  $a$  называют число, обозначаемое  $a^n$  и равное по определению произведению  $n$  равных  $a$  сомножителей, т.е.

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n.$$

Ясно, что справедливы следующие свойства степени с натуральным показателем:

- ①  $a^m \cdot a^n = a^{n+m}$
- ②  $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$
- ③ Если  $n, m \in N, m > n$ , то  $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
- ④ Если  $n, m \in N, a \geq 0$ , то  $\sqrt[n]{a^{m \cdot n}} = a^{\frac{m \cdot n}{n}} = a^m$

Определим нулевую степень числа  $a \neq 0$ , положив  $a^0 = 1$ , и отрицательную целую степень  $-n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ), положив  $a^{-n} = 1/a^n$ .

- ①  $a^0 = 1 = \frac{a^2}{a^2} = a^{2-2};$
- ②  $a^{-2} = \frac{1}{a^2} = \frac{a^2}{a^4} = a^{2-4}.$

◀ ◻ ▶ ◀ ◻ ▶ ◀ ≡ ▶ ◀ ≡ ▶ ≡

После этого можно сформулировать свойства степеней с рациональными показателями (для основания  $a > 0$ ).

$$\textcircled{1} \quad a^{r_1} \cdot a^{r_2} = a^{r_1+r_2}, \quad r_1, r_2 \in \mathbb{Q}.$$

$$\textcircled{2} \quad (a^{r_1})^{r_2} = a^{r_1 \cdot r_2}, \quad r_1, r_2 \in \mathbb{Q}.$$

$$\textcircled{3} \quad \frac{a^{r_1}}{a^{r_2}} = a^{r_1-r_2}, \quad r_1, r_2 \in \mathbb{Q}.$$

$$\textcircled{4} \quad \sqrt[n]{a^r} = a^{\frac{r}{n}}, \quad r \in \mathbb{Q}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

В дальнейшем (на первом курсе) вы узнаете, что в случае  $a > 0$  можно определить и степень с иррациональным показателем (пока в курсе школьной математики приходится в это поверить "на слово"). При этом свойства 1 – 4 будут справедливы для всего множества вещественных показателей степени.

$$\left\{3^{(\sqrt{2})n}\right\}_{n=1}^{\infty} \quad \text{и} \quad \left\{3^{(\overline{\sqrt{2}})n}\right\}_{n=1}^{\infty}$$

Таким образом, при положительном основании введена степень с любым показателем.

## СТЕПЕННАЯ ФУНКЦИЯ

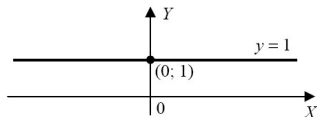


Рис. 29

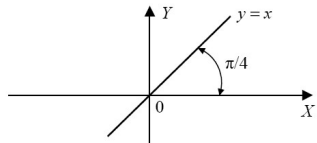


Рис. 30

Функция  $y = x^\alpha$ ,  $\alpha$  - фиксированное число, называется степенной. Ее свойства отличаются при разных  $\alpha$ .

- а)  $\alpha = 0$ . Мы имеем  $y = x^0$ . Ясно, что область определения определяется условием  $x \neq 0$  и  $y = x^0 = 1$ ,  $x \neq 0$ .

График этой функции приведен на рис. 29.

- б)  $\alpha = 1$ . Мы имеем  $y = x^1 = x$ . Это линейная функция, свойства и график которой мы знаем (рис. 30).

- в)  $\alpha = 2k$ ,  $k \in N$ . Свойства функции  $y = x^{2k}$  совпадают со свойствами  $y = x^2$ , и ее график похож на график  $y = x^2$  (рис. 31).
- г)  $\alpha = 2k + 1$ ,  $k \in N$ . Свойства функции  $y = x^{2k+1}$  совпадают со свойствами  $y = x^3$ , а ее график похож на график  $y = x^3$  (рис. 32).

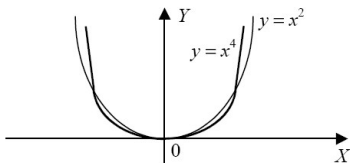


Рис. 31

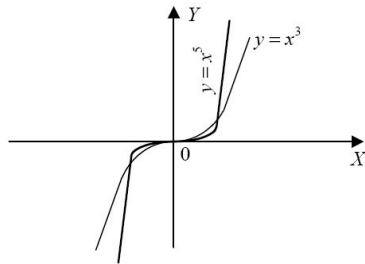


Рис. 32

д)  $\alpha = \frac{1}{n}$ ,  $n = 2, 3, \dots$ . Функция  $y = x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$  называется арифметический корень  $n$ -ой степени из  $x$ . При  $n = 2k$  область определения арифметического корня —  $[0, +\infty)$ , и эта функция является обратной для функции  $y = x^{2k}$ . Значит, ее график может быть получен симметрией относительно биссектрисы 1-го и 3-го координатных углов (рис. 33).

В случае  $n = 2k + 1$  область определения функции  $y = \sqrt[n]{x} = (-\infty, +\infty)$  и эта функция обратна к функции  $y = x^{2k+1}$  (рис. 34).

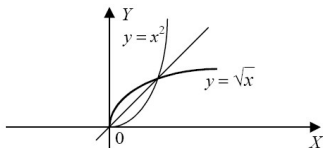


Рис. 33

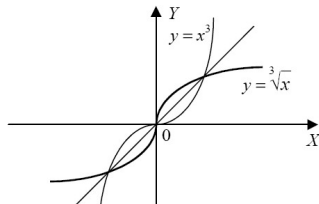


Рис. 34

## ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ

Функция вида  $y = a^x$ , где  $a > 0$ , называется показательной функцией. Согласно определению понятия степени, она определена для любых вещественных  $x$  и обладает следующими свойствами:

- 1 Показательная функция принимает только положительные значения.
- 2 При  $a > 1$  она является возрастающей, а при  $0 < a < 1$  — убывающей во всей области определения.
- 3 При  $a = 1$   $y = 1^x = 1$ .
- 4 При  $a > 0$  показательная функция принимает все положительные значения, т.е. множество ее значений представляет собой луч  $(0; +\infty)$ .

**! Замечание:** показательная функция не рассматривается при  $a < 0$ , так как при этом, согласно определению степени, ее область определения состояла бы из сравнительно "редких" значений  $x$ . Это были бы только целые числа и несократимые дроби с нечетными знаменателями, т.е. область определения в этом случае было бы даже затруднительно указать. Однако, само аналитическое выражение  $a^x$  в указанных случаях сохраняет смысл и может встречаться в решении задач.

Графики показательной функции представлены схематически на рис. 35-36.

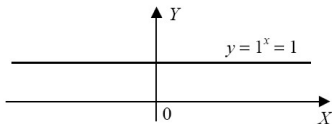


Рис. 35

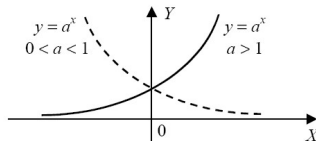


Рис. 36

Для лучшего понимания связи, имеющейся между свойствами показательной функции с основанием, большим единицы, и показательной функции с основанием, заключенным между нулем и единицей, полезна следующая теорема.

## Теорема 1.

Графики показательных функций  $y = a^x$  и  $y = b^x$ , когда  $a \cdot b = 1$ , симметричны относительно оси ординат.

▲ Доказательство: так как  $a \cdot b = 1$ , то  $b = 1/a$ , тогда  $y = b^x = (1/a)^x = (a^{-1})^x = a^{-x}$ , но тогда срабатывает общий принцип о том, что графики функций  $y = f(x)$  и  $y = f(-x)$  симметричны относительно оси ординат (см. раздел б) в п. 13). ▼

Главный вывод, который следует сделать из этой теоремы, следующий: подробному изучению (и запоминанию) подлежат свойства показательной функции в случае  $a > 1$ , а соответствующие им свойства для случая  $0 < a < 1$  могут быть получены с помощью отмеченной симметрии.

## ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ

Из свойств показательной функции следует, что в случае  $a > 0$ ,  $a \neq 1$  показательная функция  $y = a^x$  имеет обратную, которая называется логарифмической и обозначается  $\log_a x$ .

Заметим, что в случае  $a = 1$ , показательная функция  $y = 1^x = 1$  обратной не имеет (вот почему нет логарифмов с основанием, равным единице).

Свойства логарифмической функции удобно изучать и доказывать, используя основное логарифмическое тождество (см. тожд. 4 в п. 4.2), означающее, что логарифмическая функция обратна к показательной.

Ясно, что имеет место утверждение, аналогичное теореме 1.

### Теорема 2.

Графики логарифмических функций  $y = \log_a x$  и  $y = \log_b x$ , когда  $a \cdot b = 1$ , симметричны относительно оси абсцисс.

В силу того, что  $y = a^x$  и  $y = \log_a x$  взаимно обратные функции, их графики расположены симметрично относительно биссектрисы 1-го и 3-го координатных углов.

Это позволяет легко представить себе график логарифмической функции, исходя из графика показательной функции. На рис. 37, 38 изображены случаи для  $a > 1$  и  $a < 1$  соответственно.

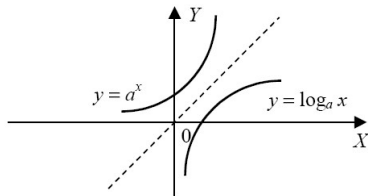


Рис. 37

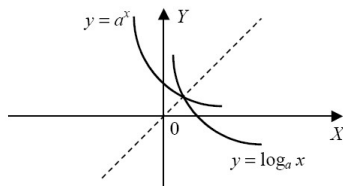


Рис. 38

## ПОКАЗАТЕЛЬНО-СТЕПЕННАЯ ФУНКЦИЯ

Функция вида  $y = f(x)^{\varphi(x)}$ , т.е. функция, содержащая переменную в основании и в показателе степени, называется показательно-степенной.

Так же, как это было сделано при определении показательной функции, показательно-степенную функцию рассматривают только на той части области определения функции  $\varphi(x)$ , где  $f(x) > 0$ . Очевидно, что при этом условии и множество значений этой функции будет состоять только из положительных чисел, поэтому, чтобы получить представление о свойствах такой функции, можно воспользоваться основным логарифмическим тождеством, представить ее как показательную:

$$f(x)^{\varphi(x)} = \left(a^{\log_a f(x)}\right)^{\varphi(x)} = a^{\varphi(x) \log_a f(x)}, \quad a > 0, \quad a \neq 1.$$

Для уравнений и неравенств, содержащих показательно-степенную функцию, такое представление равносильно приему логарифмирования обеих частей уравнения или неравенства, конечно, предварительно преобразованных к виду, удобному для логарифмирования.

**Пример 10.** Решить уравнение  $(x^2 + x - 57)^{3x^2+3} = (x^2 + x - 57)^{10x}$ .

▲1. Пусть  $x^2 + x - 57 > 0$ , тогда, прологарифмировав обе части уравнения по одному основанию, например 10, получим

$$\begin{aligned}(3x^2 + 3) \cdot \lg(x^2 + x - 57) &= 10x \cdot \lg(x^2 + x - 57) \Leftrightarrow \\ (3x^2 - 10x + 3) \cdot \lg(x^2 + x - 57) &= 0 \Leftrightarrow \\ \left[ \begin{array}{l} 3x^2 - 10x + 3 = 0 \\ \lg(x^2 + x - 57) = 0; \end{array} \right. &\Leftrightarrow \left[ \begin{array}{l} 3x^2 - 10x + 3 = 0 \\ \lg(x^2 + x - 57) = \lg 1. \end{array} \right.\end{aligned}$$

Решая 1-е уравнение, получим

$$\begin{aligned}x_{1,2} &= \frac{5 \pm \sqrt{25-9}}{3}; \\ x_1 &= 3, \quad x_2 = 1/3.\end{aligned}$$

Из второго уравнения имеем  $x^2 + x - 57 = 1 \Leftrightarrow x^2 + x - 58 = 0$ . Тогда

$$x_3 = \frac{-1-\sqrt{233}}{2}; \quad x_4 = \frac{-1+\sqrt{233}}{2}.$$

Очевидно,  $x_3$  и  $x_4$  удовлетворяют условию  $x^2 + x - 57 > 0$ , а корни  $x_1 + 3$ ,  $x_2 = 1/3$  нуждаются в проверке (они, очевидно, не удовлетворяют условию  $x^2 + x - 57 > 0$ ).

2. Так как уравнение представляет собой равенство степеней с одинаковым основанием, то рассмотрим те  $x$ , для которых показатели равны; если при этих  $x$  сама степень будет определена, то они будут также решениями уравнения. Они определяются из уравнения  $3x^2 + 3 = 10x$ , как мы уже видели, это будут  $x_1 = 3$ ,  $x_2 = 1/3$ .

При  $x_1 = 3$  представляет собой верное равенство  $(-45)^{30} = (-45)^{30}$  (обе части имеют смысл). Значит,  $x_1 = 3$  — корень уравнения.

При  $x = 1/3$  в обеих частях уравнения будут степени с дробными показателями, а основания  $< 0$ , такая степень не определена (смотри определение степени с рациональным показателем).

3. Рассмотрим случай, когда основание степени равно  $1^n$ . Если при этом показатели будут целыми числами одинаковой четности, то степени также будут иметь смысл и равны.

Если  $x^2 + x - 57 = -1$ , то  $x_5 = 7$ , и  $x_6 = -8$ .



## Элементарная математика в примерах и задачах (обучающий модуль). Часть 2

10 декабря 2007 г.

## АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ТОЖДЕСТВА

Алгебраическим выражением называется выражение, в котором числа и буквы соединены действиями сложения, вычитания, умножения, деления, возведения в натуральную степень и извлечения арифметического корня. Областью допустимых значений (ОДЗ) алгебраического выражения называется множество наборов значений входящих в это выражение букв, при которых выражение имеет смысл. Например, ОДЗ выражения  $\frac{a+b+2c}{a-3b}$  состоит из числовых наборов  $(a, b, c)$ , где  $a, b, c \in R$  и  $a \neq 3b$ . Такой числовой набор  $(1, 1, 1)$  содержится в ОДЗ этого выражения, а числовой набор  $(0, 0, 1)$  ей не принадлежит.

Говорят, что два алгебраических выражения  $A$  и  $B$  тождественно равны на множестве  $M$ , или на множестве  $M$  справедливо тождество (тождественное равенство)  $A = B$ , если  $M$  является подмножеством как ОДЗ выражения  $A$ , так и ОДЗ выражения  $B$ , и для любого набора значений из  $M$  соответствующие ему числовые значения выражений  $A$  и  $B$  равны. В тех случаях, когда множество  $M$  не указано, предполагается, что тождество  $A = B$  рассматривается на пересечении ОДЗ выражений  $A$  и  $B$ .

Замена выражения  $A$  выражением  $B$ , тождественно равным ему на множестве  $M$ , называется тождественным преобразованием выражения  $A$  на множестве  $M$ . Если не указано множество  $M$ , на котором происходит тождественное преобразование выражения  $A$ , то это преобразование проводится на ОДЗ этого выражения.

Заметим, что приведенные выше определения тождественного равенства и тождественного преобразования алгебраических выражений распространяются на другие (показательные, логарифмические, тригонометрические и прочие) выражения.

Алгебраическое выражение, не содержащее радикалов, называется рациональным. Важный класс рациональных алгебраических тождеств, называемый формулами сокращенного умножения, связан с биномом Ньютона:

$$(a + b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + \\ + \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k}a^{n-k}b^k + \dots + nab^{n-1} + b^n, \text{ где } a, b \in R, n \in N.$$

Например,

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4,$$

$$(a-b)^5 = (a+(-b))^5 = a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5.$$

Во многих задачах оказывается полезным следующее рациональное алгебраическое тождество:

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2} \cdot b + \dots + a^{n-k} \cdot b^{k-1} + \dots + a \cdot b^{n-2} + b^{n-1}), \quad \text{где } a, b \in R, \quad n > 1.$$

Например,

$$a^5 - b^5 = (a-b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4).$$

Наиболее часто встречающиеся в процессе проведения алгебраических преобразований ошибки связаны с тем, что при сокращении дробей и приведении подобных членов не учитывается возможное расширение ОДЗ преобразуемого выражения, а при умножении числителя и знаменателя дроби на одно и то же выражение, как и при добавлении к выражению одинаковых членов с взаимно противоположными знаками, не учитывается возможное сужение ОДЗ исходного выражения.

**Пример 1.** Упростить выражение

$$A = \frac{x^2 + 2x}{x^2} - \frac{2}{x} + 5x.$$

▲ Проводя сокращение дроби на  $x$  и приводя после этого подобные члены, получаем, что

$$A = 1 + \frac{2}{x} - \frac{2}{x} + 5x = 1 + 5x.$$

Однако ответ « $A = 1 + 5x$ » неверен, так как проведенные преобразования возможны лишь при  $x \neq 0$ . Поэтому верный ответ имеет вид  $A = 1 + 5x$ ,  $x \neq 0$ . ▼

Поскольку определение ОДЗ исходного выражения, как правило, громоздко, целесообразно при проведении преобразования вместо описания ОДЗ следить за ее возможным изменением.

## Пример 2. Упростить выражение

$$A = \left( 1 + \left( x^4 - \frac{x^4 + 1}{x^2 + 1} \right) \frac{x^3 - x(4x - 1) - 4}{x^7 + 6x^6 - x - 6} \right) : \frac{x^2 + 4x + 3}{3x^2 + 24x + 36}.$$

▲ Будем выполнять действия согласно правилу очередности (вначале во внутренних скобках, затем умножение и сложение во внешних скобках и, наконец, деление):

$$\begin{aligned} A &= \left( 1 + \frac{x^6 + x^4 - x^4 - 1}{x^2 + 1} \cdot \frac{x^3 - 4x^2 + x - 4}{(x^7 - x) + 6(x^6 - 1)} \right) : \frac{(x+3)(x+1)}{3(x^2 + 8x + 12)} = \\ &= \left( 1 + \frac{x^6 - 1}{x^2 + 1} \cdot \frac{(x^3 + x) - 4(x^2 + 1)}{x(x^6 - 1) + 6(x^6 - 1)} \right) : \frac{(x+3)(x+1)}{3(x+6)(x+2)} = \\ &= \left( 1 + \frac{x^6 - 1}{x^2 + 1} \cdot \frac{x(x^2 + 1) - 4(x^2 + 1)}{(x^6 - 1)(x+6)} \right) : \frac{(x+3)(x+1)}{3(x+6)(x+2)} = \\ &= \left( 1 + \frac{(x^6 - 1)(x^2 + 1)(x - 4)}{(x^2 + 1)(x^6 - 1)(x+6)} \right) : \frac{(x+3)(x+1)}{3(x+6)(x+2)} = \\ &= \frac{x+6+x-4}{x+6} : \frac{(x+3)(x+1)}{3(x+6)(x+2)} = \frac{2x+2}{x+6} \cdot \frac{3(x+6)(x+1)}{(x+3)(x+1)} = \frac{6(x+2)}{x+3}. \end{aligned}$$

В процессе проведения преобразования осуществлялось деление на дробь

$$\frac{(x+3)(x+1)}{3(x+6)(x+2)}.$$

Это возможно лишь для  $x \neq -6, -3, -2, -1$ .

Кроме того, мы выполнили сокращение дробей на  $x^6 - 1$ ,  $x^2 + 1$ ,  $x + 1$ ,  $x + 6$  что добавило к ОДЗ выражения  $A$  условие  $x \neq 1$ .

Ответ:  $A = \frac{6(x+2)}{x+3}$ ,  $(x \neq \pm 1, -6, -3, -2)$ . ▼

Алгебраическое выражение, содержащее радикалы, называется иррациональным. Преобразование таких выражений осуществляется по общим правилам. Обратим внимание на типичную ошибку, встречающуюся в работах абитуриентов и состоящую в том, что при освобождении от иррациональностей не учитывается возможность изменения ОДЗ исходного выражения.

### Пример 3. Освободиться от иррациональности в знаменателе выражения

$$A = \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}.$$

▲ Умножение числителя и знаменателя данной дроби на разность  $\sqrt{a} - \sqrt{b}$  и учет тождества

$$(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = a - b$$

немедленно приводят к результату  $A = \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b}$ .

Но приведенное умножение корректно лишь при  $a \neq b$ . Поэтому необходимо дополнительно рассмотреть случай  $a = b$ , что часто и упускают абитуриенты. Ясно, что при  $a = b$

$$A = \frac{1}{2\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{2a}.$$

Это существенно меняет предполагавшийся сначала ответ.

Ответ:

$$A = \begin{cases} \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b}, & \text{если } a \neq b, \\ \frac{\sqrt{a}}{2a}, & \text{если } a = b \neq 0. \end{cases}$$

#### Пример 4. Упростить выражение

$$f(x) = \frac{x^2 + 4x - 5 + (x - 5) \cdot \sqrt{x^2 - 1}}{x^2 - 4x - 5 + (x + 5) \cdot \sqrt{x^2 - 1}}.$$

▲ Разложим на множители квадратные трехчлены в числителе и знаменателе, заметив, что их корни соответственно равны  $x_1 = -5$ ,  $x_2 = 1$  и  $x_3 = -1$ ,  $x_4 = 5$ . Получим

$$f(x) = \frac{(x + 5)(x - 1) + (x - 5) \cdot \sqrt{x^2 - 1}}{(x - 5)(x + 1) + (x + 5) \cdot \sqrt{x^2 - 1}}.$$

Отметив, что ОДЗ радикала  $\sqrt{x^2 - 1}$  совпадает с множеством  $(-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$ , дальнейшие преобразования будем проводить отдельно во множествах  $(-\infty; -1]$  и  $[1; +\infty)$ .

а) Пусть  $(-\infty; -1]$ , тогда

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2 - 1} &= \sqrt{(x - 1)(x + 1)} = \sqrt{(1 - x)(-x - 1)} = \sqrt{1 - x} \cdot \sqrt{-x - 1}, \\ x + 1 &= -(-x - 1) = -(\sqrt{-x - 1})^2, \quad x - 1 = -(1 - x) = -(\sqrt{1 - x})^2\end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\sqrt{1-x}(-\sqrt{1-x}(x+5) + (x-5)\sqrt{-x-1})}{\sqrt{-1-x}(-(x-5)\sqrt{-x-1} + (x+5)\sqrt{1-x})} = \\ &= \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{-1-x}} = \sqrt{\frac{1-x}{-1-x}} = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}. \end{aligned}$$

Для обоснования правильности проведенного сокращения покажем, что выражение, стоящее в круглых скобках, на множестве  $(-\infty; -1]$  корней не имеет. Действительно, если

$$\begin{aligned} -(x-5)\sqrt{-x-1} + (x+5)\sqrt{1-x} &= 0, \text{ то} \\ (x+5)\sqrt{1-x} &= (x-5)\sqrt{-x-1}. \end{aligned}$$

Возводя обе части последнего уравнения в квадрат, получаем

$$(x+5)^2(1-x) = (x-5)^2(-x-1).$$

Это уравнение равносильно уравнению  $18x^2 = 50$ , корни которого имеют вид  $x_{1,2} = \pm 5/3$ . Промежутку  $(-\infty; -1]$  принадлежит  $x_2 = -5/3$ , но

$$\left(\frac{5}{3} + 5\right) \sqrt{\frac{5}{3} - 1} + \left(-\frac{5}{3} + 5\right) \sqrt{1 + \frac{5}{3}} \neq 0,$$

т.е. рассматриваемое уравнение не множестве  $(-\infty; -1]$  корней не имеет. В то же время  $x = -1$  не лежит в ОДЗ нашего уравнения, так как обращает его знаменатель в ноль.

б) Пусть  $x \in [1; +\infty)$ . Аналогично предыдущему случаю

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2 - 1} &= \sqrt{(x-1)(x+1)} = \sqrt{x-1} \cdot \sqrt{x+1}, \\ x+1 &= (\sqrt{x+1})^2, \quad x-1 = (\sqrt{x-1})^2,\end{aligned}$$

и поэтому

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{\sqrt{x-1}(\sqrt{x-1}(x+5) + (x-5)\sqrt{x+1})}{\sqrt{x+1}(\sqrt{x+1}(x-5) + (x+5)\sqrt{x-1})} = \\ &= \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}} = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}.\end{aligned}$$

Однако в отличие от предыдущего случая выражение

$$f(x) = \sqrt{x+1}(x-5) + (x+5)\sqrt{x-1}$$

обращается в нуль на множестве  $[1; +\infty)$ , и поэтому проведенное сокращение дроби возможно не на всем этом промежутке. Действительно, уравнение

$$\sqrt{x+1}(x-5) + (x+5)\sqrt{x-1} = 0$$

равносильно уравнению

$$(x+5)\sqrt{x-1} = (5-x)\sqrt{x+1}.$$

Возводя обе его части в квадрат и проводя стандартные преобразования, получаем то же, что и в пункте а ): уравнение  $18x^2 = 50$  с корнями  $x_{1,2} = \pm 5/3$ . В проверке нуждается корень  $x_1 = 5/3$ , так как  $-5/3 \notin [1, +\infty)$ .

Равенство

$$\sqrt{\frac{5}{3} + 1} \left( \frac{5}{3} - 5 \right) + \left( \frac{5}{3} + 5 \right) \sqrt{\frac{5}{3} - 1} = -\frac{10}{3} \sqrt{\frac{8}{3}} + \frac{20}{3} \sqrt{\frac{2}{3}} = 0$$

подтверждает, что  $f(x_1) = 0$ . Таким образом, проведенное сокращение верно лишь на множестве  $[1, 5/3) \cup (5/3, +\infty)$ .

Ответ:

$$f(x) = \begin{cases} -\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}, & \text{если } x \in (-\infty, -1), \\ \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}, & \text{если } x \in [1, 5/3) \cup (5/3, +\infty). \end{cases} \quad \blacktriangledown$$

## ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ И ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ ТОЖДЕСТВА

Приведем наиболее употребимые показательные, логарифмические и показательно-логарифмические тождества.

Пусть  $a > 0$ ,  $b > 0$ ,  $a \neq 1$ ,  $b \neq 1$ . Тогда:

$$1) a^{x+y} = a^x \cdot a^y,$$

$$2) a^{-x} = \frac{1}{a^x},$$

$$3) (a^x)^y = a^{xy},$$

$$4) \log_a a^x = x.$$

Для всех  $x$  и  $y$  из  $R$ , удовлетворяющих условию  $xy > 0$ ,

$$5) \log_a(xy) = \log_a |x| + \log_a |y|,$$

$$6) \log_a \frac{x}{y} = \log_a |x| - \log_a |y|.$$

Для всех  $x > 0$ ,  $a \in R$  и  $n \in N$ ,

$$7) \log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a},$$

$$8) \log_a(x^\alpha) = \alpha \log_a |x|,$$

$$9) \log_a x = \log_{a^n} x^n,$$

$$10) \log_a b = \frac{1}{\log_b a},$$

$$11) a^{\log_a x} = x,$$

$$12) \log_a x = \log \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{x}.$$

Если некоторое выражение  $A$  положительно и образовано из чисел и букв (или других выражений) при помощи операций умножения, деления и возведения в степень, то используя указанные выше тождества, можно найти выражение  $B = \log_a A$ , где  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ , через логарифмы чисел и букв (или других выражений), входящих в  $A$ . Такое преобразование выражения  $A$  называется его логарифмированием. При этом обратное преобразование выражения  $B$  в выражение  $A$  называется его потенцированием и записывается  $A = a^B$ .

**Пример 5.** Прологарифмировать по основанию 5 выражение

$$A = \frac{125a^3b^2}{\sqrt{c}}.$$

▲ Очевидно  $A > 0$ , если  $a > 0$ ,  $c > 0$ ,  $b \neq 0$ . Учитывая это и используя тождества 5), 6), 8), получаем

$$\begin{aligned} \log_5 A &= \log_5 \frac{125a^3b^2}{\sqrt{c}} = \log_5 125 + 3 \log_5 a + 2 \log_5 |b| - \frac{1}{2} \log_5 c = \\ &= 3 + 3 \log_5 a + 2 \log_5 |b| - \frac{1}{2} \log_5 c. \end{aligned}$$

**Пример 6.** Упростить выражение

$$A = \sqrt{\frac{\sqrt{1 + \frac{1}{4}(2^x - 2^{-x})^2} - 1}{\sqrt{1 + \frac{1}{4}(2^x - 2^{-x})^2} + 1}}.$$



$$\begin{aligned} \sqrt{1 + \frac{1}{4}(2^x - 2^{-x})^2} - 1 &= \frac{1}{2} \sqrt{4 + (2^x - 2^{-x})^2} - 1 = \frac{1}{2} \sqrt{(2^x + 2^{-x})^2} - 1 = \\ &= \frac{1}{2} |2^x + 2^{-x}| - 1 = \frac{1}{2} (2^x + 2^{-x}) - 1 = \frac{2^x + 2^{-x} - 2}{2} = \frac{(2^{x/2} - 2^{-x/2})^2}{2} \end{aligned}$$

(здесь мы воспользовались тем, что  $2^x > 0$  и  $2^{-x} > 0$ , поэтому  $|2^x + 2^{-x}| = 2^x + 2^{-x}$ ).

Аналогично получаем, что

$$\sqrt{1 + \frac{1}{4}(2^x - 2^{-x})^2} + 1 = \frac{(2^{x/2} + 2^{-x/2})^2}{2}.$$

## Поэтому

$$A = \sqrt{\frac{(2^{x/2} - 2^{-x/2})^2}{(2^{x/2} + 2^{-x/2})^2}} = \frac{|2^{x/2} - 2^{-x/2}|}{2^{x/2} + 2^{-x/2}} = \frac{2^{-x/2}|2^x - 1|}{2^{x/2} + 2^{-x/2}} = \frac{|2^x - 1|}{2^x + 1}.$$

Так как при  $x \geq 0$   $2^x \geq 1$ , а при  $x < 0$   $2^x < 1$ , то

$$A = \begin{cases} \frac{2^x - 1}{2^x + 1}, & \text{если } x \geq 0, \\ \frac{1 - 2^x}{2^x + 1}, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

**Пример 7.** Выяснить, что больше:  $202^{303}$  или  $303^{202}$ .

▲ *Первый способ решения.* Из свойств показательной функции следует, что  $a^c < b^c$  при  $1 < a < b$  и  $a^b < a^c$  при  $a > 1$  и  $b < c$ .

В данном примере основания и показатели сравниваемых чисел различны. Обозначая  $A = 202^{303}$  и  $B = 303^{202}$ , приведем их к одному показателю:

$$\begin{aligned} A &= (2 \cdot 101)^{3 \cdot 101} = (8 \cdot 101^3)^{101}, \\ B &= (3 \cdot 101)^{2 \cdot 101} = (9 \cdot 101^2)^{101}. \end{aligned}$$



**Пример 9.** Найти  $\log_{54} 168$ , если  $\log_7 12 = a$  и  $\log_{12} 24 = b$ .

▲ Разложим числа 168, 54, 12, 24 и 7 на простые множители:

$$168 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7; \quad 54 = 2 \cdot 3^3; \quad 12 = 2^2 \cdot 3; \quad 24 = 2^3 \cdot 3; \quad 7 = 7.$$

Отсюда видно, что число различных простых множителей, входящих в разложение, равно трем: это 2, 3, 7. Обозначая  $\log_2 3 = x$  и  $\log_2 7 = y$ , мы можем выразить через  $x$  и  $y$  все логарифмы, содержащиеся в условии. Действительно,

$$\begin{aligned} \log_7 12 &= \frac{\log_2 12}{\log_2 7} = \frac{\log_2(2^2 \cdot 3)}{y} = \frac{2 + x}{y}, \\ \log_{12} 24 &= \frac{\log_2 24}{\log_2 12} = \frac{\log_2(2^3 \cdot 3)}{\log_2(2^2 \cdot 3)} = \frac{3 + x}{2 + x}, \\ \log_{54} 168 &= \frac{\log_2 168}{\log_2 54} = \frac{\log_2(2^3 \cdot 3 \cdot 7)}{\log_2(2 \cdot 3^3)} = \frac{3 + x + y}{1 + 3x}. \end{aligned}$$

Из условия  $\log_7 12 = a$ ,  $\log_{12} 24 = b$ , для определения  $x$  и  $y$  получаем систему

$$\frac{2 + x}{y} = a, \quad \frac{3 + x}{2 + x} = b.$$



## ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ТОЖДЕСТВА

Обширное и чрезвычайно разнообразное множество тригонометрических тождеств распадается на два принципиально различных класса. К первому классу относятся тождества  $A = B$ , у которых ОДЗ выражений  $A$  и  $B$  одинаковы, и поэтому использование их при тождественных преобразованиях тригонометрических выражений не меняет ОДЗ этих выражений. К этому классу наряду с основным тригонометрическим тождеством относятся формулы суммы и разности синусов и косинусов, формулы приведения и понижения степени для синуса и косинуса, формулы суммы и разности для тангенсов и котангенсов и т.д. Ко второму классу относятся тождества  $A = B$ , у которых ОДЗ выражений  $A$  и  $B$  различны, и поэтому использование их при тождественных преобразованиях тригонометрических выражений меняет (сужает или расширяет) ОДЗ этих выражений. Особенно это важно помнить при решении тригонометрических уравнений, так как использование тождеств этого класса может привести к потере корней или к приобретению «лишних» корней. Соответствующие примеры читатель может найти в руководстве (2, гл. VII, § 4). Здесь же мы приводим наиболее часто встречающиеся тождества этого класса, советуя читателю самостоятельно описать ОДЗ левых и правых частей этих тождеств:

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} x &= \frac{1}{\operatorname{ctg} x}, & \operatorname{tg}(x \pm y) &= \frac{\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y}{1 \mp \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y}, & \sin 2x &= \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}, \\ \cos 2x &= \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}, & \operatorname{tg} 2x &= \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}.\end{aligned}$$

Укажем некоторые приемы, полезные при доказательстве наперед заданных тригонометрических тождеств. Часто при доказательстве тождества преобразуют одну более сложную часть его к другой, более простой, которая в данном случае является «неподвижной». При этом преобразовании нужно выбирать такие формулы, которые приводили бы к функции и аргументам, стоящим в «неподвижной» части.

**Пример 11.** Доказать тождество  $(\sin \alpha)^{-1} + (\operatorname{tg} \alpha)^{-1} = \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$ .

▲ Преобразуя левую часть тождества, получаем:

$$(\sin \alpha)^{-1} + (\operatorname{tg} \alpha)^{-1} = \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}}{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}} = \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}. \blacktriangledown$$

Если не удастся преобразовать одну часть тождества к другой или это преобразование очень сложно, следует попробовать преобразовать обе части тождества к одному и тому же выражению.

### Пример 12. Доказать тождество

$$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + 3\alpha\right)}{1 - \sin(3\alpha - \pi)} = \operatorname{ctg}\left(\frac{5}{4}\pi + \frac{3}{2}\alpha\right).$$

▲ Обозначая левую часть тождества через  $A$ , а правую через  $B$  и упрощая вначале  $B$  (это выражение более простое, оно может быть «эталоном» для дальнейших упрощений  $A$ ), имеем

$$B = \operatorname{ctg}\left(\pi + \frac{\pi}{4} + \frac{3}{2}\alpha\right) = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{3}{2}\alpha\right).$$

Займемся упрощением левой части. Будем иметь при этом в виду, что функции в данном выражении нужно привести к аргументу

$$\frac{\pi}{4} + \frac{3}{2}\alpha$$

(преобразованная правая часть теперь — «эталон»). Тогда, очевидно, аргумент числителя

$$\frac{\pi}{2} + 3\alpha = 2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{3}{2}\alpha\right),$$

а в знаменателе можно использовать формулу

$$1 + \cos x = 2 \cos^2 \frac{x}{2},$$

если вместо синуса получить косинус, что помогают нам сделать известные формулы приведения:

$$\sin(3\alpha - \pi) = -\sin(\pi - 3\alpha) = -\sin\left(\frac{\pi}{2} + \left(\frac{\pi}{2} - 3\alpha\right)\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{2} - 3\alpha\right).$$

Тогда

$$A = \frac{\sin 2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{3}{2}\alpha\right)}{1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} - 3\alpha\right)} = \frac{2 \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{3}{2}\alpha\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{3}{2}\alpha\right)}{2 \cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{3}{2}\alpha\right)}.$$

Заметим, что

$$\left(\frac{\pi}{4} - \frac{3}{2}\alpha\right) + \left(\frac{\pi}{4} + \frac{3}{2}\alpha\right) = \frac{\pi}{2},$$

откуда

$$\frac{\pi}{4} - \frac{3}{2}\alpha = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{4} + \frac{3}{2}\alpha\right),$$

поэтому, используя формулу приведения

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x,$$

получаем

$$\begin{aligned} A &= \frac{2 \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{3}{2}\alpha\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{3}{2}\alpha\right)}{2 \cos^2\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{4} + \frac{3}{2}\alpha\right)\right)} = \frac{2 \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{3}{2}\alpha\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{3}{2}\alpha\right)}{2 \sin^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{3}{2}\alpha\right)} = \\ &= \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{3}{2}\alpha\right). \blacktriangledown \end{aligned}$$

### Пример 13. Доказать тождество

$$\sin 2\alpha(1 + \operatorname{tg} 2\alpha) + \frac{1 + \sin \alpha}{1 - \sin \alpha} = \operatorname{tg} 2\alpha + \operatorname{tg}^2 \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2} \right).$$

▲ Здесь обе части тождества достаточно сложны, но второе слагаемое в левой части сравнительно просто преобразуется ко второму слагаемому правой части:

$$\frac{1 + \sin \alpha}{1 - \sin \alpha} = \frac{1 - \cos \left( \frac{\pi}{2} + \alpha \right)}{1 + \cos \left( \frac{\pi}{2} + \alpha \right)} = \frac{2 \sin^2 \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2} \right)}{2 \cos^2 \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2} \right)} = \operatorname{tg}^2 \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2} \right).$$

Остается доказать равенство первых слагаемых левой и правой части тождества. Для этого рассмотрим их разность и покажем, что она равна нулю:

$$\begin{aligned} & \sin 2\alpha(1 + \operatorname{tg} 2\alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha) - \operatorname{tg} 2\alpha = \sin 2\alpha + \operatorname{tg} 2\alpha(\sin 2\alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha - 1) = \\ & = \sin 2\alpha + \operatorname{tg} 2\alpha \left( \frac{2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha}{\cos \alpha} - 1 \right) = \\ & = \sin 2\alpha + \operatorname{tg} 2\alpha(2 \sin^2 \alpha - 1) = \sin 2\alpha + \operatorname{tg} 2\alpha(2 \sin^2 \alpha - \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) = \\ & = \sin 2\alpha + \operatorname{tg} 2\alpha(\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) = \\ & = \sin 2\alpha - \operatorname{tg} 2\alpha \cdot \cos 2\alpha = \sin 2\alpha - \sin 2\alpha = 0. \blacktriangledown \end{aligned}$$

### Пример 14. Доказать, что равенство

$$\sin \alpha \cdot \sin 2\alpha \cdot \sin 3\alpha = 1$$

невозможно ни при каком значении  $\alpha$ .

▲ Имеем

$$\begin{aligned} \sin \alpha \cdot \sin 2\alpha \cdot \sin 3\alpha &= \sin 2\alpha (\sin \alpha \cdot \sin 3\alpha) = \frac{1}{2} \sin 2\alpha (\cos 2\alpha - \cos 4\alpha) = \\ &= \frac{1}{2} \sin 2\alpha \cdot \cos 2\alpha - \frac{1}{2} \sin 2\alpha \cdot \cos 4\alpha = \frac{1}{4} \sin 4\alpha - \frac{1}{4} (\sin 6\alpha - \sin 2\alpha) = \\ &= \frac{1}{4} (\sin 4\alpha - \sin 6\alpha - \sin 2\alpha). \end{aligned}$$

Так как

$$\frac{1}{4} |\sin 4\alpha - \sin 6\alpha - \sin 2\alpha| \leq \frac{1}{4} (|\sin 4\alpha| + |\sin 6\alpha| + |\sin 2\alpha|) \leq \frac{3}{4},$$

то  $\sin \alpha \cdot \sin 2\alpha \cdot \sin 3\alpha \neq 1$  ни при каком  $\alpha$  из  $R$ . ▼

Умение преобразовать к простейшему виду то или иное тригонометрическое выражение играет основную роль в различных задачах тригонометрии. Если тригонометрическое выражение содержит тригонометрические функции числовых аргументов, то в общем случае нужно перейти к тригонометрическим функциям острых углов.

**Пример 15.** Упростить выражение

$$A = \left( \frac{\cos(-215^\circ) \operatorname{ctg} 305^\circ}{\cos 125^\circ} + \sin(-35^\circ) \cdot \cos 125^\circ \right) : \sin^2 125^\circ.$$

▲ Используя периодичность функции и формулы приведения, приведем все тригонометрические функции из условия к функциям острых углов. Кроме того, используем свойство четности и нечетности тригонометрических функций:

$$\begin{aligned} A &= \left( \frac{\cos 215^\circ \operatorname{ctg}(270^\circ + 35^\circ)}{\cos(90^\circ + 35^\circ)} - \sin 35^\circ \cdot \cos(90^\circ + 35^\circ) \right) : \sin^2(90^\circ + 35^\circ) = \\ &= \left( \frac{\cos(180^\circ + 35^\circ)(-\operatorname{tg} 35^\circ)}{-\sin 35^\circ} - \sin 35^\circ \cdot (-\sin 35^\circ) \right) : \cos^2 35^\circ = \\ &= \left( \frac{-\cos 35^\circ \cdot \operatorname{tg} 35^\circ}{\sin 35^\circ} + \sin^2 35^\circ \right) : \cos^2 35^\circ = (\sin^2 35^\circ - 1) : \cos^2 35^\circ = -1. \end{aligned}$$

Ответ:  $A = -1$ . ▼

**Пример 16.** Упростить выражение

$$A = \operatorname{tg}^2(-4,7\pi) \cdot \cos^2(-7,8\pi) + \sin^2(-11,7\pi).$$

▲ Так как период тангенса равен  $\pi$ , то можно к его аргументу прибавить число, кратное  $\pi$  и такое, чтобы в результате получился аргумент в первой четверти, т.е.

$$\operatorname{tg}^2(-4,7\pi) = \operatorname{tg}^2(-4,7\pi + 5\pi) = \operatorname{tg}^2(0,3\pi).$$

Аналогично к аргументу синуса и косинуса прибавим число, кратное  $2\pi$ :

$$\cos^2(-7,8\pi) = \cos^2(-7,8\pi + 8\pi) = \cos^2(0,2\pi),$$

$$\sin^2(-11,7\pi) = \sin^2(-11,7\pi + 12\pi) = \sin^2(0,3\pi).$$

так как  $0,2\pi + 0,3\pi = \pi/2$ , то все функции можно привести к одному аргументу:

$$\begin{aligned} A &= \operatorname{tg}^2 0,3\pi \cdot \cos^2\left(\frac{\pi}{2} - 0,3\pi\right) + \sin^2 0,3\pi = \operatorname{tg}^2 0,3\pi \cdot \sin^2 0,3\pi + \sin^2 0,3\pi = \\ &= \sin^2 0,3\pi (\operatorname{tg}^2 0,3\pi + 1) = \sin^2 0,3\pi \frac{1}{\cos^2 0,3\pi} = \operatorname{tg}^2 0,3\pi. \end{aligned}$$

Ответ:  $A = \operatorname{tg}^2 0,3\pi$ . ▼

### Пример 17. Упростить выражение

$$A = \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2(1+\cos 4\alpha)}}}, \quad 0 \leq \alpha \leq \pi/2.$$

▲ Вначале освободимся от внутреннего радикала:

$$A = \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2(1+\cos 4\alpha)}}} = \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{4 \cos^2 2\alpha}}} = \frac{2}{\sqrt{2+2|\cos 2\alpha|}}.$$

Так как  $0 \leq \alpha \leq \pi/2$ , то  $0 \leq 2\alpha \leq \pi$ , и, следовательно,

$$|\cos 2\alpha| = \begin{cases} \cos 2\alpha, & \text{если } 0 \leq 2\alpha \leq \pi/2, \\ -\cos 2\alpha, & \text{если } \pi/2 < 2\alpha \leq \pi, \end{cases}$$

поэтому при  $0 \leq \alpha \leq \pi/4$  имеем

$$A = \frac{2}{\sqrt{2+2\cos 2\alpha}} = \frac{2}{\sqrt{2(1+\cos 2\alpha)}} = \frac{2}{\sqrt{4\cos^2 \alpha}} = \frac{2}{2|\cos \alpha|} = \frac{1}{\cos \alpha},$$

а при  $\pi/4 < \alpha \leq \pi/2$

$$A = \frac{2}{\sqrt{2-2\cos 2\alpha}} = \frac{2}{\sqrt{2(1-\cos 2\alpha)}} = \frac{2}{\sqrt{4\sin^2 \alpha}} = \frac{2}{2|\sin \alpha|} = \frac{1}{\sin \alpha}.$$

Ответ:

$$A = \begin{cases} 1/\cos \alpha, & \text{если } 0 \leq \alpha \leq \pi/4, \\ 1/\sin \alpha, & \text{если } \pi/4 < \alpha \leq \pi/2. \end{cases} \quad \blacktriangledown$$



$$\begin{aligned} A_2 &= \cos 36^\circ \cdot \cos 72^\circ = \frac{2 \sin 36^\circ \cdot \cos 36^\circ \cdot \cos 72^\circ}{2 \sin 36^\circ} = \\ &= \frac{\sin 72^\circ \cdot \cos 72^\circ}{2 \sin 36^\circ} = \frac{\sin 144^\circ}{4 \sin 36^\circ} = \frac{\sin(180^\circ - 36^\circ)}{4 \sin 36^\circ} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Поэтому  $A = A_1 \cdot A_2 \cdot \cos 60^\circ = \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{128}$ .

Ответ:  $A = 1/128$ . ▼

На этом примере мы убедились, что для вычисления произведения косинусов, аргументы которых образуют геометрическую прогрессию со знаменателем  $q = 2$ , полезно это произведение умножить и разделить на синус наименьшего аргумента и затем применить последовательно несколько раз формулу  $2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha = \sin 2\alpha$ . Аналогичное замечание можно высказать о сумме косинусов или синусов с аргументами, образующими арифметическую прогрессию. В этом случае полезно каждое слагаемое умножить и разделить на  $2 \sin \frac{d}{2}$ , где  $d$  — разность прогрессии, и преобразовать получившееся произведение в сумму.

### Пример 19. Вычислить

$$A = \cos \frac{\pi}{11} + \cos \frac{3\pi}{11} + \cos \frac{5\pi}{11} + \cos \frac{7\pi}{11} + \cos \frac{9\pi}{11}.$$

▲ Действуя по изложенному выше алгоритму, получаем

$$A = \frac{2 \sin \frac{\pi}{11} \cos \frac{\pi}{11} + 2 \sin \frac{\pi}{11} \cos \frac{3\pi}{11} + 2 \sin \frac{\pi}{11} \cos \frac{5\pi}{11}}{2 \sin \frac{\pi}{11}} + \frac{2 \sin \frac{\pi}{11} \cos \frac{7\pi}{11} + 2 \sin \frac{\pi}{11} \cos \frac{9\pi}{11}}{2 \sin \frac{\pi}{11}} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\sin \frac{2\pi}{11} + \left( \sin \frac{4\pi}{11} - \sin \frac{2\pi}{11} \right) + \left( \sin \frac{6\pi}{11} - \sin \frac{4\pi}{11} \right)}{2 \sin \frac{\pi}{11}} + \\
 &+ \frac{\left( \sin \frac{8\pi}{11} - \sin \frac{6\pi}{11} \right) + \left( \sin \frac{10\pi}{11} - \sin \frac{8\pi}{11} \right)}{2 \sin \frac{\pi}{11}} = \\
 &= \frac{\sin \frac{10\pi}{11}}{2 \sin \frac{\pi}{11}} = \frac{\sin \left( \pi - \frac{\pi}{11} \right)}{2 \sin \frac{\pi}{11}} = \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

Ответ:  $A = 1/2$ . ▼

## Уравнения. Равносильность уравнений. Логарифмические и показательные уравнения

Напомним, что уравнением с одним неизвестным называется условное равенство

$$f(x) = g(x), \quad (1)$$

где  $f(x)$  и  $g(x)$  — две числовые функции одного и того же аргумента  $x$ , называемого неизвестным уравнения.

Множеством решений уравнений называется множество всех значений неизвестного, образующих при подстановке в левую и правую часть (1) верное числовое равенство. Такие значения называют корнями уравнения.

Решить уравнение — это значит найти его множество решений. Оно может оказаться конечным (в частности, пустым) или бесконечным множеством.

Два уравнения называются равносильными, если их множества решений совпадают.

Областью допустимых значений (ОДЗ) уравнения называют общую часть областей определения функций, его образующих.

Процесс решения уравнения в идеале — это цепочка переходов от исходного уравнения к равносильным, с помощью равносильных преобразований приводящая к такому уравнению, для которого множество решений может быть найдено. Однако не всегда это удается сделать.

Иногда бывает удобным область допустимых значений уравнения представить в виде объединения непересекающихся множеств, и процесс решения уравнения на всех ОДЗ заменяется решением уравнения на отдельных ее частях, а множество решений в этом случае — объединение полученных множеств решений. В этом случае возникает и естественное понятие равносильности уравнений на множестве (уже не обязательно совпадающем на всей ОДЗ).

При выполнении неравносильных преобразований возможны две ситуации: множество решений полученного уравнения «шире» множества исходного уравнения (посторонние корни), или «уже», чем у исходного (потеря корней). Особенно «подозрительными» или «опасными» являются преобразования, при которых ОДЗ изменяется (расширяется или суживается), так могут появиться посторонние корни или может произойти потеря корней.

Однако сохранение ОДЗ не гарантирует ни от потери, ни от приобретения корней. Разберем несколько показательных примеров.

## Пример 1. Решить уравнение

$$4(x^2 - 7x + 12) \log_{1/4} |x - 4| = (x^2 - 6x + 8) \log_2 (x - 4)^2.$$



0) Выпишем ОДЗ:  $x \neq 4$ .

1) Перейдем в левой части к логарифму по основанию 2 и разложим квадратные трехчлены на линейные множители:

$$4(x - 3)(x - 4) \frac{\log_2 |x - 4|}{\log_2 \frac{1}{4}} = (x - 2)(x - 4) \log_2 (x - 4)^2.$$

2) Т.к. в ОДЗ  $x - 4 \neq 0$ , разделим обе части на  $(x - 4)$  и прологарифмируем степень в правой части:

$$\cancel{4}(x - 3)\cancel{(x - 4)} \frac{\log_2 |x - 4|}{\cancel{(-2)} - 1} = (x - 2)\cancel{(x - 4)} 2 \log_2 |x - 4|.$$

получим:

$$-(x - 3) \log_2 |x - 4| = (x - 2) \log_2 |x - 4|.$$

3) Перенесем все в левую часть и вынесем  $\log_2 |x - 4|$  за скобки:

$$(-x + 3 - x + 2) \log_2 |x - 4| = 0$$

$$\text{или } (2x - 5) \log_2 |x - 4| = 0.$$

4) Приравнявая к нулю сомножители, получим совокупность уравнений:

$$a) 2x - 5 = 0;$$

$$x_1 = 5/2.$$

$$б) \log_2 |x - 4| = 0; |x - 4| = 1;$$

$$x_2 = 3; x_3 = 5.$$

Ответ:  $\{5/2; 3; 5\}$ . ▼

**! Замечание:** так как на каждом из шагов выполнялись равносильные преобразования, то проверку можно не выполнять.

А теперь покажем, какие ошибки возможны при решении.

0') Забудем про ОДЗ.

$$1') 4(x - 4)(x - 3) \frac{\log_2 |x - 4|}{(-2)} = (x - 4)(x - 2) \log_2 (x - 4)^2.$$

2')  $(x - 4)(-2(x - 3) \log_2 |x - 4| - 2(x - 2) \log_2 (x - 4)) = 0$  (допущены ошибки при логарифмировании степени).

3')  $x - 4 = 0$  или  $-(x - 3) \log_2 |x - 4| - (x - 2) \log_2 (x - 4) = 0$ . Здесь уже приобретен посторонний корень  $x = 4$  (он не входит в ОДЗ) и подготовлена потеря корней. (Применение неверной формулы

$$\log_2 (x - 4)^2 \neq 2 \log_2 (x - 4)$$

сузило ОДЗ.)

4') Т.к. выражение под знаком логарифма должно быть положительным, то  $x - 4 > 0$  и, значит,  $|x - 4| = x - 4$ . (Ошибка в 2' предопределила это.)

Тогда  $-(x-3)\log_2(x-4) - (x-2)\log_2(x-4) = 0$ .

а) если сократить на  $\log_2(x-4)$ , то произойдет потеря корня  $x = 5$ ;

б) если вынести  $\log_2(x-4)$  за скобки, то

$$\log_2(x-4)(-x+3-x+2) = 0.$$

Неверный ответ: а)  $\{5/2\}$ , б)  $\{5/2; 4; 5\}$ .

Как видно, и в случае а), и в случае б) мы далеко ушли от верного ответа.

**! Выводы из решенного примера.**

- 1) Опасно делить обе части уравнения на выражение, содержащее неизвестное (можно потерять корни).
- 2) Если уравнение содержит общий множитель, содержащий неизвестное, т.е. имеет вид:

$$r(x)f_1(x) = r(x)g_1(x),$$

то его следует привести к виду

$$r(x)(f_1(x) - g_1(x)) = 0$$

и перейти к совокупности уравнений:

$$r(x) = 0 \text{ или } f_1(x) - g_1(x) = 0,$$

которые следует решать на ОДЗ исходного уравнения (иначе могут получиться посторонние корни (см. 3')).

3) При решении уравнений нельзя делать ошибок типа

$$\log_2(x-4)^2 = 2\log_2(x-4) -$$

они могут привести к потере корней (из-за сужения ОДЗ).

**Пример 2.** Решить уравнение  $2x + 1 = \sqrt{x^2 - 2x + 1}$ .



- 0) Т.к.  $x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2 \geq 0$ , то ОДЗ уравнения — все множество действительных чисел  $R$ .
- 1) Воспользуемся формулой  $\sqrt{a^2} = |a|$ :  $2x + 1 = |x - 1|$ .  
Выражение  $x - 1$ , стоящее под знаком модуля, больше либо равно нулю при  $x \geq 1$ .
- 2) Разобьем ОДЗ на две части  $(-\infty; 1)$  и  $[1; +\infty)$  и решим уравнение на каждой из этих частей отдельно:
  - а) если  $x \in (-\infty; 1)$ , то  $2x + 1 = -x + 1$ ,  $3x = 0$ ,  $x_1 = 0$ ;
  - б) если  $x \in [1; +\infty)$ , то  $2x + 1 = x - 1$ ,  $x_2 = -2$ ;  $x_2 = -2$  не подходит, так как  $-2 \notin [1; +\infty)$ .

Ответ:  $x = 0$ . ▼

## Неверные решения

▲ Возведем обе части уравнения в квадрат:

$$4x^2 + 4x + 1 = x^2 - 2x + 1;$$

$$3x^2 + 6x = 0;$$

$$x^2 + 2x = 0;$$

$$x(x + 2) = 0;$$

$$x_1 = 0; x_2 = -2.$$

Появился посторонний корень  $x_2 = -2$ ; если сделать проверку, то ответ будет неверен. ▼

▲ Извлечем корень в правой части (допустив ошибку  $\sqrt{a^2} = a$ ):

$$2x + 1 = x - 1;$$

$$x = -2.$$

Пропал верный корень  $x = 0$  и появился посторонний корень  $x = -2$ . ▼

**! Выводы из приведенного примера.**

- 1) При возведении обеих частей уравнения в четную степень могут появиться «посторонние корни», для их отсева нужна проверка.
- 2) Ошибки при решении, например,  $\sqrt{x^2 - 2x + 1} = x - 1$ , могут привести к потере корней и появлению посторонних корней.

- 3) Переход от  $\sqrt{f(x) \cdot g(x)}$  к  $\sqrt{f(x)} \cdot \sqrt{g(x)}$  сужает ОДЗ и влечет за собой возможную потерю корней.
- 4) Переход от  $\log_a(f(x) \cdot g(x))$  к  $\log_a f(x) + \log_a g(x)$  сужает ОДЗ, а переход от расширяет ОДЗ.

В заключение еще раз напомним, что

$$\sqrt{a^2} = |a|, \log_a x^{2n} = 2n \log_a |x|, \quad n \in \mathbb{N}.$$

**Пример 3.** Решить уравнение

$$\sqrt{4 \log_3(3^{2x} - 3^{x+1}) + 7} = \log_3(3^{2x} - 3^{x+1}) + 1.$$

▲ Сделаем замену  $t = \log_3(3^{2x} - 3^{x+1})$ . Тогда уравнение примет вид

$$\sqrt{4t + 7} = t + 1.$$

Оно равносильно системе

$$\begin{cases} t + 1 \geq 0, \\ 4t + 7 = (t + 1)^2. \end{cases}$$

Очевидно, что все решения неравенства и только они удовлетворяют условию  $t \geq -1$ . Займемся теперь уравнением системы. Его можно переписать в виде

$$4t + 7 = t^2 + 2t + 1 \quad \text{или} \quad t^2 - 2t - 6 = 0.$$

Последнее уравнение имеет корни  $t_1 = 1 - \sqrt{7}$ ,  $t_2 = 1 + \sqrt{7}$ .

Так как  $1 - \sqrt{7} < -1$ , то корень  $t_1$  в отличие от корня  $t_2$  не удовлетворяет неравенству системы. Вспоминая о сделанной замене, имеем

$$\log_3(3^{2x} - 3^{x+1}) = 1 + \sqrt{7}.$$

По определению логарифма это уравнение равносильно следующему

$$3^{2x} - 3^{x+1} = 3^{1+\sqrt{7}}.$$

Пусть  $3^x = q$ , тогда уравнение примет вид  $q^2 - 3q - 3^{1+\sqrt{7}} = 0$ .

Его корни

$$q_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 4 \cdot 3^{1+\sqrt{7}}}}{2}.$$

Так как  $q_1 = 3 - \sqrt{9 + 4 \cdot 3^{1+\sqrt{7}}} < 0$ , то уравнение  $3^x = q_1$  не имеет решений. Для положительного корня  $q_2$  получим

$$3^x = \frac{3 + \sqrt{9 + 4 \cdot 3^{1+\sqrt{7}}}}{2}.$$

Это уравнение имеет единственный корень

$$x = \log_3 \frac{3 + \sqrt{9 + 4 \cdot 3^{1+\sqrt{7}}}}{2} \quad \blacktriangledown$$

#### Пример 4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \log_4(y+1) \cdot \log_{\sqrt{x-1}} 2 = 1, \\ \frac{10 - 7 \cdot 3^x}{9 \cdot 3^y - 1} + 2 \cdot 3^x = 2. \end{cases}$$

▲ Преобразуем первое уравнение системы:

$$\begin{aligned} \log_4(y+1) \cdot \log_{\sqrt{x-1}} 2 &= 1, \\ \frac{1}{2} \log_2(y+1) \cdot \frac{1}{\log_2 \sqrt{(x-1)}} &= 1, \\ \frac{\log_2(y+1)}{\log_2(x-1)} &= 1, \\ \log_{(x-1)}(y+1) &= 1. \end{aligned}$$

Тогда с учетом ОДЗ исходного уравнения

$$\begin{cases} y+1 > 0, \\ x-1 > 0, \\ x-1 \neq 1, \\ x-1 = y+1, \end{cases} \quad \begin{cases} y > -1, \\ x > 1, \\ x \neq 2, \\ y = x - 2. \end{cases}$$

Подставим найденное выражение  $y$  во второе уравнение исходной системы:

$$\frac{10 - 7 \cdot 3^x}{9 \cdot 3^{x-2} - 1} + 2 \cdot 3^x - 2 = 0.$$

Обозначим  $3^x = t \geq 0$ , получим уравнение относительно  $t$ :

$$\frac{10 - 7t + 2t^2 - 2t - 2t + 2}{t - 1} = 0,$$

$$\begin{cases} 2t^2 - 11t + 12 = 0, \\ t \neq 1, \end{cases}$$

$$t_1 = 4, \quad t_2 = \frac{3}{2}$$

Итак, приходим к решению двух систем

$$1) \begin{cases} 3^x = 4, \\ y = x - 2, \\ y > -1, \\ x > 1, \\ x \neq 2, \\ x = \log_3 4 > 1, \\ y = \log_3 4 - 2 > -1, \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 3^x = \frac{3}{2}, \\ y = x - 2, \\ y > -1, \\ x > 1, \\ x \neq 2, \end{cases}$$

Ответ:  $x = \log_3 4$ ,  $y = \log_3 4 - 2$ .

$$\log_{x-2}(x^2 - 3x + 2) = 3.$$
$$\begin{cases} x^2 - 3x + 2 > 0, \\ x - 2 > 0, \\ x - 2 \neq 1, \\ x^2 - 3x + 2 = (x - 2)^3, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x - 1)(x - 2) > 0, \\ x - 2 > 0, \\ x \neq 3, \\ (x - 2)((x - 1) - (x - 2)^2) = 0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x > 2, \\ x \neq 3, \\ x - 1 - x^2 + 4x - 4 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2, \\ x \neq 3, \\ x^2 - 5x + 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2, \\ x \neq 3, \\ x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{2}. \end{cases}$$

Ответ:  $x = \frac{5 + \sqrt{5}}{2}$ . ▼

**Пример 6.** Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{\left(\frac{5x^2 + y^2}{x^2 - 5y^2} - \frac{3}{2}\right)^2} = \frac{5}{2} \\ 3x - \sqrt{2}xy + 3\sqrt{6}y = 0. \end{cases}$$

▲ Преобразуем первое уравнение, воспользовавшись тождеством  $\sqrt{a^2} = |a|$ :

$$\begin{cases} \left| \frac{(5x^2 + y^2) \cdot 2 - 3(x^2 - 5y^2)}{2(x^2 - 5y^2)} \right| = \frac{5}{2} & (*) \\ 3x - \sqrt{2}xy + 3\sqrt{6}y = 0. \end{cases}$$

Заметим, что пара чисел  $x = 0$ ,  $y = 0$  не может быть решением уравнения. Разделим числитель и знаменатель дроби в левой части первого уравнения на  $y^2$  и введем новую неизвестную  $t = \frac{x}{y}$ , тогда относительно  $t$  получим уравнение

$$\left| \frac{7t^2 + 17}{2(t^2 - 5)} \right| = \frac{5}{2}, \quad \text{или} \quad \begin{cases} 7t^2 + 17 = \pm 5(t^2 - 5), \\ t^2 - 5 \neq 0. \end{cases}$$

Рассмотрим два случая.

1)  $7t^2 + 17 = 5t^2 - 25$  — это уравнение не имеет решений.

$$2) \begin{cases} 7t^2 + 17 = -5t^2 + 25, \\ t^2 \neq 5, \end{cases} \Leftrightarrow t = \pm \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Теперь вернемся к системе (\*).

$$1) \begin{cases} \frac{x}{y} = \sqrt{\frac{2}{3}}, \\ 3x - \sqrt{2}xy + 3\sqrt{6}y = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{\frac{2}{3}}y, \\ 3\sqrt{\frac{2}{3}}y - \sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}}y^2 + 3\sqrt{6}y = 0. \end{cases}$$

После упрощения получим

$$\begin{cases} x = \sqrt{\frac{2}{3}}y, \\ y \left( 4\sqrt{6} - \frac{2}{\sqrt{3}y} \right) = 0. \end{cases}$$

Так как пара чисел  $(0; 0)$  не является решением системы, то получим

$$\begin{cases} x_1 = 2\sqrt{3}, \\ y_1 = 6\sqrt{2}. \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} \frac{x}{y} = -\sqrt{\frac{2}{3}}, \\ 3x - \sqrt{2}xy + 3\sqrt{6}y = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\sqrt{\frac{2}{3}}y, \\ -3\sqrt{\frac{2}{3}}y + \sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}}y^2 + 3\sqrt{6}y = 0. \end{cases}$$

После упрощения получим

$$\begin{cases} x = -\sqrt{\frac{2}{3}}y, \\ y \left( 2\sqrt{6} + \frac{2}{\sqrt{3}y} \right) = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 2\sqrt{3}, \\ y_2 = -3\sqrt{2}. \end{cases}$$

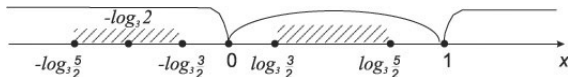
Ответ:  $\begin{cases} x_1 = 2\sqrt{3}, \\ y_1 = 6\sqrt{2}, \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 2\sqrt{3}, \\ y_2 = -3\sqrt{2}. \end{cases}$  ▼

**Пример 7.** Найти все решения уравнения

$$9^{|x|} - 3^{|x-1|} + 2 = 0,$$

удовлетворяющие неравенству

$$\log_3 \frac{3}{2} \leq |x| \leq \log_3 \frac{5}{2}.$$



Применяя метод интервалов к уравнению с модулями и учитывая ограничения на искомые значения переменной  $x$ , видим из рисунка, что уравнение следует решать на двух интервалах:  $(-\infty; 0]$  и  $(0; 1]$ .

$$a) \begin{cases} x \leq 0, \\ 9^{-x} - 3^{-x+1} + 2 = 0. \end{cases}$$

Обозначим  $3^{-x} = t > 0$ . Получим квадратное уравнение относительно  $t$ :

$$t^2 - 3t + 2 = 0, \quad t_1 = 1, \quad t_2 = 2.$$

1)  $3^{-x} = 1 \Leftrightarrow x = 0$  — не удовлетворяет условию.

2)  $3^{-x} = 2 \Leftrightarrow x = -\log_3 2 = \log_3 \frac{1}{2}$ .

Так как  $\log_3 \frac{2}{5} < \log_3 \frac{1}{2} < \log_3 \frac{1}{3}$ , то  $x = \log_3 \frac{1}{2}$  является искомым корнем.

$$6) \begin{cases} 0 < x \leq 1, \\ 9^x - 3^{-x+1} + 2 = 0. \end{cases}$$

Обозначим  $3^x = t > 0$ . Получим уравнение относительно  $t$ :

$$t^2 - \frac{3}{t} + 2 = 0, \quad t^3 + 2t - 3 = 0.$$

Легко видеть, что  $t = 1$  является корнем этого уравнения. Разложим многочлен  $t^3 + 2t - 3$  на множители. Для этого разделим его на  $t - 1$ , получим

$$t^3 + 2t - 3 = (t - 1)(t^2 + t + 3)$$

Так как квадратный трехчлен  $t^2 + t + 3$  корней не имеет, то  $t = 1$  — единственный корень уравнения.

Из  $3^x = 1$  получаем  $x = 0$ . Это значение неизвестной  $x$  не принадлежит множеству  $(0; 1]$ .

Ответ:  $x = \log_3 \frac{1}{2}$ . ▼

### Пример 8. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2^{\frac{x}{7}} = 2^{\frac{y}{7}} \cdot 2^{\frac{7}{x}}, \\ \log_7(x^2 - y^2) = \log_7 5 + 1. \end{cases}$$

▲ ОДЗ:  $x^2 - y^2 > 0$ .

Преобразуя правую часть второго уравнения системы к виду  $\log_7 5 + 1 = \log_7 35$ , приходим к следующей цепочке равносильных для  $x \in \text{ОДЗ}$  преобразований:

$$\begin{cases} 2^{\frac{x}{7}} = 2^{\frac{y}{7}} \cdot 2^{\frac{7}{x}}, \\ x^2 - y^2 = 35; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{7} = \frac{y}{7} + \frac{7}{x}, \\ x^2 - y^2 = 35; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{xy + 49 - x^2}{7x} = 0, \\ x^2 - y^2 = 35; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x^2 - xy - 49 = 0, \\ x^2 - y^2 = 35; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x - y) = 49, \\ (x - y)(x + y) = 35. \end{cases}$$

Выражая  $x - y$  из каждого уравнения системы получим равенство:

$$\frac{49}{x} = \frac{35}{x + y} \Leftrightarrow y = -\frac{2}{7}x$$

Теперь, подставляя найденное для  $y$  выражение в первое уравнение системы, будем иметь:

$$x \left( x + \frac{2}{7}x \right) = 49 \Leftrightarrow x^2 = \frac{49 \cdot 7}{9}$$

В результате получим:

$$\begin{cases} x = \frac{7\sqrt{7}}{3} \\ y = -\frac{2\sqrt{7}}{3} \end{cases}; \quad \begin{cases} x = -\frac{7\sqrt{7}}{3} \\ y = \frac{2\sqrt{7}}{3} \end{cases}.$$

Заметим, что каждое из найденных решений данной системы удовлетворяет ОДЗ.

Ответ:  $\left( \frac{7\sqrt{7}}{3}; -\frac{2\sqrt{7}}{3} \right), \left( -\frac{7\sqrt{7}}{3}; \frac{2\sqrt{7}}{3} \right)$ . ▼

52/107

Возвращаясь к переменной  $x$ , получим:

$$\begin{cases} \sqrt[3]{\sqrt{x}-2} = 0 \\ \sqrt[3]{\sqrt{x}-2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = 9 \end{cases}$$

Ответ:  $x_1 = 4, x_2 = 9$ . ▼

## Рациональные уравнения и системы

Простейшим случаем рационального уравнения является линейное уравнение. Эти уравнения крайне редко встречаются на вступительных экзаменах, и их решение не вызывает затруднений.

Несколько более сложными являются квадратные уравнения, имеющие вид  $ax^2 + bx + c = 0$ , где  $a, b, c$  — действительные числа и  $a \neq 0$ . Решения этого уравнения зависят от величины  $D = b^2 - 4ac$ .

Если  $D < 0$ , уравнение не имеет действительных корней, если  $D > 0$ , то уравнение имеет два действительных корня, вычисляемых по формуле

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}.$$

Если же  $D = 0$ , уравнение имеет два равных между собой корня:

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}.$$

Если корни квадратного уравнения  $x_1$  и  $x_2$  действительны (далее в этом случае будем говорить, что они существуют), то для них справедливы **формулы Виета**:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}. \end{cases}$$

Зная формулы Виета, можно решать многие задачи, в частности, исследовать знаки корней квадратного уравнения. Справедливы следующие утверждения, которые желательно доказать самостоятельно.

**! Утверждение 1.** Для того, чтобы корни квадратного уравнения существовали и были разных знаков, необходимо и достаточно выполнение следующих соотношений:

$$D > 0, \quad \frac{c}{a} < 0.$$

**! Утверждение 2.** Для того, чтобы корни квадратного уравнения существовали и были оба положительными, необходимо и достаточно выполнение следующих соотношений:

$$D \geq 0, \quad \frac{c}{a} > 0, \quad \frac{b}{a} < 0.$$

**! Утверждение 3.** Для того, чтобы корни квадратного уравнения существовали и были оба отрицательными, необходимо и достаточно выполнение следующих соотношений:

$$D \geq 0, \quad \frac{c}{a} > 0, \quad \frac{b}{a} > 0.$$

Приведем примеры характерных задач.

**Пример 1.** При каких значениях параметра  $a$  корни уравнения  $x^2 - 3ax + a^2 = 0$  таковы, что сумма их квадратов равна  $7/4$ ?

▲ Корни этого уравнения существуют, если  $D \geq 0$ .

$D = 9a^2 - 4a^2 = 5a^2 \geq 0$  при любых действительных значениях  $a$ . Это означает, что для любых  $a$  справедливы формулы Виета, т.е.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3a, \\ x_1 \cdot x_2 = a^2. \end{cases}$$

Выразим сумму квадратов корней через известные величины:

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 9a^2 - 2a^2 = 7a^2.$$

Найдем значения параметра  $a$ , при которых  $x_1^2 + x_2^2 = 7/4$ , решая уравнение относительно  $a$ :

$$7a^2 = 7/4, \quad a = \pm 1/2. \blacktriangledown$$

**Пример 2.** При каких значениях  $k$  уравнение  $x^2 + 2(k - 1)x + k + 5 = 0$  имеет два положительных корня?

▲ Воспользовавшись утверждением 2, получаем, что ответ на поставленный вопрос задачи получится в результате решения следующей системы:

$$\begin{cases} D = 4(k - 1)^2 - 4(k + 5) \geq 0, \\ \frac{c}{a} = k + 5 > 0, \\ \frac{b}{a} = 2(k - 1) < 0. \end{cases}$$

Упрощая эту систему, получим:

$$\begin{cases} 4k^2 - 12k - 16 \geq 0, \\ k + 5 > 0, \\ k - 1 < 0. \end{cases}$$

Эта система равносильна следующей:

$$\begin{cases} k \leq -1 \text{ или } k \geq 4, \\ k > -5, \\ k < 1, \end{cases}$$

которая имеет решение  $-5 < k \leq -1$ . ▼





Эта система равносильна следующей системе:

$$\begin{cases} -7k^2 + 40 \geq 0, \\ k > -4, \\ k^2 + k - 3 > 0. \end{cases}$$

Последняя система имеет следующие решения:

$$-\sqrt{\frac{40}{7}} \leq k < \frac{-1 - \sqrt{13}}{2} \quad \text{или} \quad \frac{-1 + \sqrt{13}}{2} < k \leq \sqrt{\frac{40}{7}}. \blacktriangledown$$

Для решения уравнений высших степеней (уравнений вида  $x^n + a_n x^{n-1} + \dots + a_2 x + a_1 = 0$  при  $n > 2$ ) нельзя дать столь же четких рецептов, как для решения квадратных уравнений.

Успех в их решении зависит от опыта и сообразительности решающего, однако, некоторые рекомендации могут быть полезными. Часто используется при решении уравнений высших степеней метод разложения на множители.

Разложить на множители можно либо методом группировки, либо опираясь на **теорему Безу**:

### Теорема Безу

Если  $x_0$  — произвольное число, то при делении многочлена  $P_n(x) = x^n + a_n x^{n-1} + \dots + a_2 x + a_1$  на двучлен  $(x - x_0)$  получается остаток, равный значению многочлена при  $x = x_0$  (т.е.  $P_n(x_0)$ ).

Из этой теоремы следует, что если  $x_0$  — корень уравнения  $P_n(x) = 0$ , то  $(x - x_0)$  является делителем этого многочлена. Поэтому, если мы «угадаем» один из корней уравнения, нам останется разложить многочлен на множители  $P_n(x) = (x - x_0) \times P_{n-1}(x)$  и решить уравнение на единицу меньшей степени, и, если такое уравнение окажется квадратным, то все проблемы решены. Помочь «угадать» корни уравнения может следующее **утверждение**:

### Утверждение

Если корень уравнения  $x^n + a_n x^{n-1} + \dots + a_2 x + a_1 = 0$ , где  $a_n, \dots + a_2, a_1$  — целые числа, является рациональным числом, то он является целым числом, являющимся делителем свободного члена  $a_1$ .

Это утверждение позволяет определить круг претендентов на звание «целого корня». Справедливо и более общее **утверждение**:

### Утверждение

Если корень уравнения  $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$ , где  $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$  - целые числа, является рациональным числом вида  $x = m/k$ , где  $\text{НОД}(m, k) = 1$ , то  $m$  является делителем  $a_0$ , а  $k$  — делителем  $a_n$ .

Для того, чтобы разделить многочлен на двучлен, можно воспользоваться алгоритмом деления многочлена на многочлен «углом». При этом старшая степень делимого делится на старшую степень делителя. Полученное частное умножается на делитель, и это произведение вычитается из делимого. Такая же процедура производится для полученного остатка. Процесс продолжается до тех пор, пока, пока степень остатка не окажется меньше степени делителя. Действие этого алгоритма будет продемонстрировано при решении примера 5.

#### Пример 4. Решить уравнение

$$2x^3 + 3x^2 + 3x + 2 = 0.$$

▲ Сгруппируем многочлен, стоящий в левой части, следующим образом:

$$2(x^3 + 1) + 3x(x + 1).$$

Видно, что каждое выражение, стоящее в скобках, имеет делитель  $(x + 1)$ , тогда имеем:

$$(x + 1)(2x^2 - 2x + 2 + 3x) = 0.$$

Произведение равно 0, когда хотя бы один из сомножителей равен 0, т.е.  $x + 1 = 0$  (откуда  $x = -1$ ) или  $2x^2 + x + 2 = 0$ . Последнее уравнение действительных корней не имеет.

Ответ: уравнение имеет единственное решение  $x = -1$ . ▼

#### Пример 5. Решить уравнение

$$x^3 - x^2 - 21x + 45 = 0.$$

▲ Целые корни этого уравнения будем искать среди чисел  $\pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 9, \pm 15, \pm 45$ . Проверая эти числа, находим корень  $x_1 = 3$ . Делим многочлен, стоящий слева, на двучлен  $x - 3$ :

$$\begin{array}{r|l}
 x^3 - x^2 - 21x + 45 & x - 3 \\
 \hline
 x^3 - 3x^2 & x^2 + 2x - 15 \\
 \hline
 2x^2 - 21x + 45 & \\
 2x^2 - 6x & \\
 \hline
 -15x + 45 & \\
 -15x + 45 & \\
 \hline
 0 & 
 \end{array}$$

Теперь необходимо решить уравнение  $x^2 + 2x - 15 = 0$ . Оно имеет корни:  
 $x_2 = 3$ ,  $x_3 = -5$ .

Ответ:  $x_{1,2} = 3$ ,  $x_3 = -5$ . ▼

Многие уравнения высших степеней могут быть приведены к квадратным уравнениям путем замены переменных.

### Пример 6. Решить уравнение

$$\frac{21}{x^2 - 4x + 10} - x^2 + 4x - 6 = 0.$$

▲ Прежде всего следует определить ОДЗ уравнения. Поскольку знаменатель дроби не обращается в 0, то  $\text{ОДЗ} = R$ .

На первый взгляд представляется, что это уравнение можно решить, приводя левую часть его к общему знаменателю. Однако, этот путь приведет к необходимости решения уравнения четвертой степени. Поэтому более перспективным представляется следующий путь.

Обозначим  $x^2 - 4x + 10 = y$ . Т.к.  $x^2 - 4x + 10 = (x - 2)^2 + 6 \geq 6$ , потребуем, чтобы  $y \geq 6$ . Тогда  $-x^2 + 4x - 6 = -y + 4$ , и исходное уравнение имеет вид

$$\frac{21}{y} - y + 4 = 0.$$

Приводя левую часть к общему знаменателю и вспоминая, что  $y \neq 0$ , получаем решение этого уравнения:

$$y_1 = -3, \quad y_2 = 7,$$

при этом  $y_1$  не удовлетворяет условию  $y \geq 6$ .

Теперь остается решить уравнение

$$x^2 - 4x + 10 = 7,$$

имеющее корни  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 3$ .

Ответ:  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 3$ . ▼

**Пример 7.** Решить уравнение

$$4x^2 + 12x + \frac{12}{x} + \frac{4}{x^2} = 47.$$

▲ ОДЗ в этом уравнении:  $x \neq 0$ . Сгруппируем средние и крайние члены в левой части уравнения:

$$4\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 12\left(x + \frac{1}{x}\right) = 47.$$

Если обозначить  $x + \frac{1}{x} = y$ , то  $x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$ .

Имеем квадратное уравнение

$$4(y^2 - 2) + 12y = 47.$$

Это уравнение имеет решения:

$$y_1 = -\frac{11}{2}; \quad y_2 = \frac{5}{2},$$

$$x + \frac{1}{x} = -\frac{11}{2},$$

$$x_1 = \frac{-11 - \sqrt{105}}{4}; \quad x_2 = \frac{-11 + \sqrt{105}}{4},$$

$$x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2},$$

$$x_3 = 1/2; \quad x_4 = 2.$$

Ответ:  $x_{1,2} = \frac{-11 \pm \sqrt{105}}{4}; \quad x_3 = \frac{1}{2}; \quad x_4 = 2. \blacktriangledown$

Справедлива теорема, которая называется **обратной теоремой Виета**:

### Обратная теорема Виета

Если числа  $t_1$  и  $t_2$  таковы, что

$$\begin{cases} t_1 + t_2 = -b/a, \\ t_1 \cdot t_2 = c/a, \end{cases}$$

тогда они являются решениями квадратного уравнения

$$at^2 + bt + c = 0.$$

Эта теорема позволяет решать ряд систем рациональных уравнений. Другим важным способом решения систем рациональных уравнений является метод подстановки, когда одна переменная из одного уравнения выражается через другую и подставляется в другое уравнение. При этом получается система, равносильная исходной, в которой одно из уравнений зависит только от одной переменной. Не менее часто используется и метод замены, аналогично используемому при решении уравнений.

### Пример 8. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x + y + \frac{x}{y} = 1/2, \\ \frac{(x+y)x}{y} = -1/2. \end{cases}$$

▲ Определим ОДЗ системы:  $x$  — любое действительное число,  $y \neq 0$ .  
Вначале сделаем замену неизвестных. Обозначим

$$\begin{cases} x + y = u, \\ x/y = v. \end{cases}$$

Тогда получаем систему

$$\begin{cases} u + v = 1/2, \\ u \cdot v = -1/2, \end{cases}$$

которую можно решить, используя теорему, обратную теореме Виета, т.е. решая квадратное уравнение

$$\begin{aligned} 2t^2 - t - 1 &= 0, \\ t_1 &= -1/2, \quad t_2 = 1. \end{aligned}$$

Таким образом, рассматриваемая система имеет два решения:

$$\begin{cases} u_1 = -1/2, \\ v_1 = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} u_2 = 1, \\ v_2 = -1/2. \end{cases}$$


Теперь вернемся к исходным переменным. Для их нахождения необходимо решить две системы уравнений:

$$\begin{cases} x + y = -1/2, \\ x/y = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = 1, \\ x/y = -1/2, \end{cases}$$

которые равносильны соответственно следующим:

$$\begin{cases} x + y = -1/2, \\ x = y, \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = 1, \\ y = -2x. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2y = -1/2, \\ x = y, \end{cases} \quad \begin{cases} -x = 1, \\ y = -2x. \end{cases}$$

Ответ:  $\begin{cases} y_1 = -1/4, \\ x_1 = -1/4, \end{cases} \begin{cases} x_2 = -1, \\ y_2 = 2. \end{cases}$  

### Пример 9. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^3 - y^3 = 19, \\ x^2y - xy^2 = 6. \end{cases}$$

▲ Вычтем утроенное второе уравнение из первого, а во втором вынесем за скобки  $xy$ :

$$\begin{cases} (x - y)^3 = 1, \\ xy(x - y) = 6. \end{cases}$$

Последняя система уравнений равносильна следующей:

$$\begin{cases} x - y = 1, \\ xy = 6, \end{cases}$$

которую можно решать либо методом подстановки, либо используя теорему Виета.

Ответ:  $\begin{cases} x_1 = -2, \\ y_1 = -3, \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 3, \\ y_2 = 2. \end{cases}$  ▼

Следует указать также метод для решения специального вида систем. Этот метод применяется в случаях, когда все одночлены, входящие в оба уравнения, относительно двух переменных  $x$  и  $y$  имеют одну и ту же степень, либо одно из уравнений обладает таким свойством, но при этом оно должно быть однородным, т.е. иметь свободный член, равный 0.

Метод состоит в следующем. Прежде всего следует проверить, является ли  $y = 0$  решением этой системы. В обоих случаях в дальнейшем будем предполагать  $y \neq 0$ . Тогда можно сделать замену  $x = ty$ . Вспоминая, что все одночлены имеют одинаковую степень, можно построить уравнение относительно  $t$ . Решая его, мы получаем выражение  $x$  через  $y$ . Дальнейшие действия очевидны.

**Пример 10.** Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x^2 + xy - 45y^2 = 0, \\ 2x + 9y^2 = 4. \end{cases}$$

▲ Прежде всего проверим, является ли  $y = 0$  решением этой системы. Если  $y = 0$ , то из первого уравнения  $x = 0$ , но это не удовлетворяет второму уравнению. В дальнейшем будем предполагать  $y \neq 0$ . Тогда можно положить  $x = ty$ . Подставляя соотношения в первое уравнение, получаем:

$$2t^2y^2 + ty^2 - 45y^2 = 0.$$

Т.к.  $y \neq 0$ , обе части уравнения можно разделить на  $y^2$ , получая уравнение для  $t$ :

$$2t^2 + t - 45 = 0.$$

Решая это уравнение, получаем  $t_1 = -5$ ,  $t_2 = 9/2$ .

Таким образом, исходная система равносильна объединению двух систем:

$$\begin{cases} x = -5y, \\ 2x + 9y^2 = 4, \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{9}{2}y, \\ 2x + 9y^2 = 4. \end{cases}$$

Эти системы можно решить методом подстановки. В результате получим:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{-25 + 5\sqrt{61}}{9}, \\ y_1 = \frac{5 - \sqrt{61}}{9}; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = \frac{-25 - 5\sqrt{61}}{9}, \\ y_2 = \frac{5 + \sqrt{61}}{9}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_3 = -6, \\ y_3 = -4/3; \end{cases} \quad \begin{cases} x_4 = 3/2, \\ y_4 = 1/3. \end{cases} \quad \blacktriangledown$$

**Пример 11.** Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 - 5xy = 16, \\ 2xy + y^2 = 3. \end{cases}$$

▲ Эту систему можно решать двумя путями. Первое уравнение можно умножить на 3, а второе на  $(-16)$  и полученные уравнения сложить. После этого можно применить метод, использованный для решения примера 9.

Этот метод можно использовать и для решения исходной системы непосредственно. Прежде всего убедимся, что  $y = 0$  не является решением системы, и, считая в дальнейшем  $y \neq 0$ , положим  $x = ty$ . Тогда получаем систему

$$\begin{cases} t^2 y^2 - 5ty^2 = 16, \\ 2ty^2 + y^2 = 3. \end{cases}$$

Разделив первое уравнение на второе и учитывая, что  $y \neq 0$ , получаем:

$$\frac{t^2 - 5t}{2t + 1} = \frac{16}{3},$$

$$t_1 = -1/3, \quad t_2 = 16.$$

Следовательно, исходная система равносильна объединению двух систем:

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{3}y, \\ 2xy + y^2 = 3, \end{cases} \quad \begin{cases} x = 16y, \\ 2xy + y^2 = 3. \end{cases}$$



Решая квадратное уравнение и раскрывая модуль получим:

$$1) \begin{cases} |x - y| = 1, \\ xy = -2, \end{cases} \quad 1.1) \begin{cases} x - y = 1, \\ xy = -2, \end{cases} \quad 1.2) \begin{cases} x - y = -1, \\ xy = -2, \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} |x - y| = 3, \\ xy = -2, \end{cases} \quad 2.1) \begin{cases} x - y = 3, \\ xy = -2, \end{cases} \quad 2.2) \begin{cases} x - y = -3, \\ xy = -2. \end{cases}$$

Найденные системы можно решить с помощью обратной теоремы Виетта или методом подстановки.

Ответ.  $(2; -1), (1; -2), (-2; 1), (-1, 2)$ . ▼

## Числовые неравенства и их свойства

Существует четыре знака неравенства:  $>$  («больше»),  $\geq$  («больше или равно»),  $<$  («меньше»),  $\leq$  («меньше или равно»). Сгруппируем их в два множества  $\{>; <\}$ ,  $\{\geq; \leq\}$ .

Два знака неравенства, принадлежащие одному множеству, называют противоположными, т.е.  $<$  противоположный знак для  $>$ , и наоборот, знак  $\leq$  противоположен  $\geq$ .

Два числа (числовых выражений), соединенные одним знаком неравенства, образуют числовое неравенство.

Числовые неравенства делятся на верные и неверные.

**Пример 1.**  $2 < 3$ ,  $2 \leq 2$ ,  $-2 \leq 2$ ,  $-1 \geq -1$ ,  $-2 < -1$ ,  $2 \geq 1$  — верные неравенства;

$2 < 1$ ,  $2 \geq 3$ ,  $1 \leq -1$ ,  $1 < -2$  — неверные неравенства.

По определению, неравенство  $a > b$  верно тогда и только тогда, когда точка, изображающая число  $a$  на числовой оси, лежит правее точки, изображающей число  $b$ .

Равносильное и более удобное при доказательстве свойств неравенств определение состоит в следующем:  $a > b$  — верное неравенство тогда и только тогда, когда разность  $a - b$  — положительное число. При доказательстве свойств неравенств это определение записывается так: « $a > b \Leftrightarrow \underline{a - b > 0}$ ». При этом подчеркнутую часть нужно читать не « $a - b$  больше нуля», а «разность  $a - b$  — положительное число». (Самостоятельно дайте соответствующие определения для остальных знаков неравенств.)

Перечислим основные свойства числовых неравенств. Для этого введем еще одно обозначение: если  $\alpha$  — какой-то из знаков неравенства, то  $\bar{\alpha}$  — противоположный к нему знак неравенства.

- 1 Неравенство  $a \alpha b$  равносильно неравенству  $b \bar{\alpha} a$ .  
(Рефлексивное свойство числовых неравенств.)
- 2 Если  $a \alpha b$  и  $b \alpha c$ , то  $a \alpha c$ .  
(Транзитивное свойство числовых неравенств.)
- 3 Если  $a \alpha b$  и  $c$  — произвольное число, то  $a + c \alpha b + c$ . (К обеим частям неравенства можно прибавить одно и то же число.)  
Следствие свойства 3. Если  $a \alpha b$  и  $c$  — произвольное число, то  $a - c \alpha b - c$ .
- 4 Если  $a \alpha b + c$ , то  $a - c \alpha b$ . (Слагаемое можно переносить из одной части неравенства в другую с противоположным знаком.)
- 5 Если  $a \alpha b$  и  $c > 0$ , то  $ac \alpha bc$ . (Обе части неравенства можно умножить на положительное число, сохраняя знак неравенства.)  
Следствие из свойства 5. Если  $a \alpha b$  и  $c < 0$ , то  $ac \bar{\alpha} bc$ .
- 6 Если  $a \alpha b$  и  $c \alpha d$ , то  $a + c \alpha b + d$ . (Неравенства одинакового смысла можно складывать по частям.)  
Следствие из свойства 6. Если  $a \alpha b$  и  $c \bar{\alpha} d$ , то  $a - c \alpha b - d$ .
- 7 Если  $a \alpha b$  и  $c \alpha d$  и  $a, b, c, d$  — положительные числа, то  $ac \alpha bd$ .  
(Неравенства одинакового смысла с положительными частями можно перемножать по частям.)

Если  $a \propto b$  и  $a, b$  - положительны, то  $a^n \propto b^n, n \in N$ . (Неравенства с положительными частями можно возводить по частям в любую натуральную степень.)

*Следствие 2 из свойства 7.*

Если  $a \propto b$  и  $a, b$  — положительны, то  $\sqrt[n]{a} \propto \sqrt[n]{b}, n \in N$ . (Из обеих частей неравенства с положительными частями можно извлечь корень любой натуральной степени.)

Подумайте и разберитесь самостоятельно, что будет вместо свойства 7 и следствия из него для неравенства с отрицательными частями.

## О РЕШЕНИИ НЕРАВЕНСТВ

Неравенством с одним неизвестным называют условное неравенство вида

$$f(x) \alpha g(x), \quad (2)$$

где  $f(x)$  и  $g(x)$  — две числовые функции одного и того же аргумента  $x$ , называемого неизвестным.

Множеством решений неравенства (1) называют множество всех значений неизвестного  $x$ , при подстановке которых в (1) получается верное числовое неравенство. Сами эти значения называются решениями неравенства. Решить неравенство — это значит найти его множество решений.

Два неравенства называют равносильными, если их множества решений совпадают.

Областью допустимых значений (ОДЗ) неравенства называют общую часть (пересечение) областей определения функций, входящих в неравенство.

Процесс решения неравенства, в идеале, это цепочка равносильных переходов от исходного неравенства к такому неравенству, множество решений которого известно или может быть легко найдено.

Однако, это не всегда удастся сделать. В процессе неравносильных преобразований могут появляться как посторонние решения, так и может происходить потеря решений. причем, в отличие от уравнений, для неравенства все обстоит значительно сложнее. Это видно из последующих примеров.

Поэтому мы рекомендуем при решении неравенств выполнять равносильные преобразования, аккуратно следить за тем, чтобы не выйти за ОДЗ исходного неравенства или не потерять ее часть.

Перечислим наиболее распространенные преобразования, приводящие к равносильным неравенствам (обратите внимание на связь этих утверждений со свойствами числовых неравенств).

- ① Если к обеим частям неравенства прибавить одну и ту же функцию, определенную на ОДЗ, то получится неравенство, равносильное исходному.
- ② Если обе части неравенства умножить или разделить на одну и ту же функцию, все значения которой в ОДЗ положительны (отрицательны), то получим неравенство, равносильное исходному (то изменив знак неравенства на противоположный, получим неравенство, равносильное исходному).
- ③ Если в обеих частях неравенства стоят функции, все значения которых в ОДЗ положительны, то возводя обе части неравенства в  $n$ -ю степень (извлекая корень  $n$ -ой степени), получим неравенство, равносильное исходному.
- ④ Если  $F(f(x)) \propto F(g(x))$  и функция  $F$  строго возрастающая (строго убывающая), то неравенство  $F(f(x)) \propto F(g(x))$  равносильно на ОДЗ исходного неравенства неравенству  $f(x) \propto g(x)$  (равносильно на ОДЗ исходного неравенства неравенству  $f(x) \bar{\propto} g(x)$ ).

Перечисление 1-4 — это простые («безопасные») ситуации, а теперь разберемся, что делать в «коварных случаях».

- 1 Как и при решении уравнений неприятности могут происходить в точках обращения в ноль общего множителя в левой и правой частях. Эти точки ОДЗ заслуживают отдельного рассмотрения. В случае неравенства типа « $<$ » или « $>$ » они не являются решениями, а в случае неравенств « $\leq$ » или « $\geq$ » такие значения являются решениями.
- 2 В отличие от уравнений «коварными» являются и точки ОДЗ, в которых общий множитель отличен от нуля, так как при умножении (делении) обеих частей неравенства на положительное число или выражение знак неравенства сохраняется, а на отрицательное — меняется на противоположный. Поэтому приходится выделять эти подслучаи.
- 3 При решении неравенств (особенно иррациональных) часто возникает необходимость возведения обеих частей неравенства в квадрат (четную степень). Это самая опасная ситуация, так как:

а) если обе части неравенства неотрицательны (эту ситуацию условно обозначим «+»  $\alpha$  «+»), то обе части неравенства для таких значений неизвестного можно возвести в квадрат (четную степень), сохраняя знак неравенства;

б) если обе части неравенства неположительны ( $\llcorner \alpha \llcorner$ ), то обе части неравенства для таких значений неизвестного можно возвести в квадрат (четную степень), меняя знак неравенства на противоположный ( $\llcorner \alpha \llcorner \Leftrightarrow (\llcorner)^2 \overline{\alpha} (\llcorner)^2$ );

в) если обе части неравенства имеют разные знаки, то при таких значениях неизвестного нельзя обе части неравенства возводить в квадрат (четную степень), да и не нужно, так как сразу ясно, являются или не являются решением неравенства значения неизвестного, реализующие эту ситуацию (см. дальнейшие примеры). Ситуации пункта в) условно обозначим «+» α «-» и «-» α «+».

Таким образом, при необходимости возведения обеих частей неравенства в квадрат (четную степень) приходится выделять эти подслучаи и проводить решения для них отдельно.

Самым удобным для решения неравенства типа  $f(x) \alpha 0$ , где  $f(x)$  — рациональная функция, является метод интервалов, когда ОДЗ, представляющая собой числовую прямую, числовой луч или числовой промежуток с выколотыми точками, разбивается точками обращения в ноль функции  $f(x)$  и точками, в которых  $f(x)$  не определена (как правило это нули знаменателя), на интервалы. При этом полученные точки обращения в ноль и точки, в которых  $f(x)$  не определена, делятся на два типа: точки перемены знака функции  $f(x)$  и точки сохранения знака функции  $f(x)$ . (Слева и справа от точки перемены знака  $f(x)$  имеет разные знаки, слева и справа от точки сохранения знака  $f(x)$  имеет один и тот же знак.)

Для возникающих точек будем применять следующие обозначения:



— точка обращения в ноль, являющаяся точкой перемены знака;



— точка обращения в ноль, не являющаяся точкой перемены знака;



— точка, в которой  $f(x)$  не определена, являющаяся точкой перемены знака;



— точка, в которой  $f(x)$  не определена, не являющаяся точкой перемены знака.

Нанеся на числовую прямую все такие точки, мы разбиваем ОДЗ на интервалы знакопостоянства. Для того, чтобы определить знаки функции  $f(x)$  на интервалах, достаточно определить ее знак на одном из них. (Обычно в правом, беря в качестве пробной точки  $x = 10^6$ ;  $x = 10^{20}$ ;  $x = 10^{30}$  и т.п.)

**Пример 2.** Решить неравенство

$$\frac{(x^2 - 1)(x + 2)^2(x + 7)(x - 3)}{(x^2 - 5x + 6)(x - 2)} \geq 0.$$

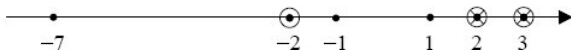
▲ Найдем ОДЗ:

$$\begin{cases} x^2 - 5x + 6 \neq 0 \\ x - 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 2 \\ x \neq 3 \end{cases}$$

1. Разложим квадратные трехчлены  $x^2 - 1$  и  $x^2 - 5x + 6$  на линейные множители

$$\frac{(x - 1)(x + 1)(x + 2)^2(x + 7)(x - 3)}{(x - 2)^2(x - 3)} \geq 0.$$

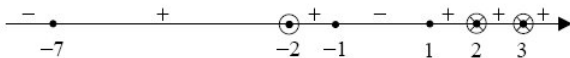
2. Применяем метод интервалов. Точка  $x = -7$  является точкой перемены знака, в которой происходит обращение в ноль левой части неравенства, такими же точками являются точки  $x = -1$  и  $x = 1$ . Точка  $x = -2$  является точкой обращения в ноль левой части, в которой не происходит перемена знака. Точки  $x = 2$  и  $x = 3$  являются точками потери смысла левой части (нельзя сокращать выражение в левой части на множитель  $(x - 3)!$ ), в которых не происходит перемена знака. Изобразим все это на числовой оси, применяя обозначения, приведенные выше:



В качестве пробной точки для определения знака левой части на  $(3; +\infty)$  возьмем

$$x = 10^6, (10^6 - 1) > 0, (10^6 + 1) > 0, (10^6 + 2)^2 > 0, (10^6 + 7) > 0, \\ (10^6 - 3) > 0, (10^6 - 2)^2 > 0, (10^6 - 3) > 0,$$

т.е. левая часть при  $x = 10^6$  и на всем множестве  $(3; +\infty)$  больше нуля. Расставим знаки левой части по интервалам (слева направо), учитывая смысл опорных для метода интервалов точек:



Выпишем ответ неравенства:

$$[-7; -1] \cup [1; 2) \cup (2; 3) \cup (3; +\infty). \blacktriangledown$$

Метод интервалов хорошо работает не только в тех случаях, когда мы имеем дело с рациональными функциями.

**Пример 3.** Изменим условие примера 2 и решим неравенство

$$\frac{(x^2 - 1)(x + 2)^2(x + 7)(x - 3) \log_{1/2}(x + 5)}{(x - 2)(x^2 - 5x + 6) \log_2 |x - 1|} \leq 0.$$

▲ Найдем ОДЗ:

$$\begin{cases} x^2 - 5x + 6 \neq 0; \\ x - 2 \neq 0; \\ x + 5 > 0; \\ |x - 1| > 0; \\ |x - 1| \neq 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 2; \\ x \neq 3; \\ x > -5; \\ x \neq 1; \\ x \neq 0. \end{cases}$$

Таким образом, ОДЗ:

$$(-5; 0) \cup (0; 1) \cup (1; 2) \cup (2; 3) \cup (3; +\infty)$$

— числовой луч  $(-5; +\infty)$  с выколотыми точками  $x = 0$ ,  $x = 1$ ,  $x = 2$ ,  $x = 3$ .

1. Разложим  $x^2 - 1$  и  $x^2 - 5x + 6$  на линейные множители:

$$\frac{(x - 1)(x + 1)(x + 2)^2(x + 7)(x - 3) \log_{1/2}(x + 5)}{(x - 2)^2(x - 3) \log_2 |x - 1|}$$

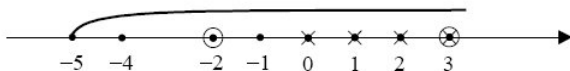
2. Применим метод интервалов. Для этого следует проанализировать только точки, попавшие во множество  $(-5; +\infty)$ . Точка  $x = 3$  является точкой потери смысла левой части, в которой не происходит перемена знака (за счет множителя  $(x - 3)$  в числителе). Точка  $x = -4$  является точкой обращения в ноль числителя, в которой происходит перемена знака (за счет множителя  $\log_{1/2}(x + 5)$ ). Точка  $x = -2$  является точкой обращения в ноль левой части, в которой не происходит перемены знака множителя  $(x + 2)^2$ , точка  $x = -1$  является точкой обращения в ноль левой части, в которой происходит перемена знака множителя  $(x + 1)$ . Точка  $x = 0$  является точкой потери смысла левой части, являющейся точкой перемены знака знаменателя ( $\log_2 |x - 1|$  меняет знак с «+» на «-» при переходе через точку  $x = 0$ ). Точка  $x = 1$  — точка потери смысла левой части, являющейся точкой перемены знака

функции  $\frac{(x - 1)}{\log_2 |x - 1|}$ .

Точка  $x = 2$  — точка потери смысла левой части, в которой происходит перемена знака.

Функция  $\frac{1}{(x - 2)^2 \log_2 |x - 1|}$  меняет знак, так как  $(x - 2)^2$  не меняет знак, а  $\log_2 |x - 1|$  меняет знак при переходе через точку  $x = 2$ .

Нанесем полученные точки и множество  $(-5; +\infty)$  на числовую ось, используя введенные обозначения:



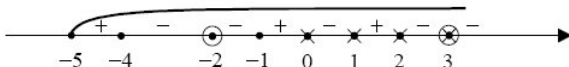
Определим знак левой части на интервале  $(3; +\infty)$ , используя в качестве пробной (опорной) точки  $x = 10^{22}$ :

$$(10^{22} - 1) > 0; \quad (10^{22} + 1) > 0; \quad (10^{22} + 2)^2 > 0; \quad (10^{22} + 7) > 0;$$

$$(10^{22} - 3) > 0; \quad \log_{1/2}(10^{22} + 5) < 0(!);$$

$$(10^{22} - 2)^2 > 0; \quad (10^{22} - 3) > 0; \quad \log_2 |10^{22} - 1| > 0.$$

Расставляя знаки левой части по интервалам, начиная с  $(3; +\infty)$ , получим



Ответ:  $[-4; -1] \cup (0; 1) \cup (2; 3) \cup (3; +\infty)$ . ▼

**Пример 4.** Решить неравенство

$$\frac{x^2 + 5 - 2x\sqrt{5}}{(x-2)(x+2)} \geq \frac{x^2 - 5}{(x+2)^2}.$$

▲ Заметим, что  $x^2 - 2x\sqrt{5} + 5 = (x - \sqrt{5})^2$ , а  $x^2 - 5 = (x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5})$ .  
Перенесем все слагаемые в одну сторону:

$$\frac{(x - \sqrt{5})^2}{(x-2)(x+2)} - \frac{(x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5})}{(x+2)^2} \geq 0.$$

Вынесем общий множитель за скобку

$$\frac{(x - \sqrt{5})}{(x+2)} \left( \frac{x - \sqrt{5}}{x-2} - \frac{x + \sqrt{5}}{x+2} \right) \geq 0.$$

Выполним в скобках приведение к общему знаменателю:

$$\frac{x - \sqrt{5}}{x+2} \cdot \frac{(x - \sqrt{5})(x+2) - (x + \sqrt{5})(x-2)}{(x-2)(x+2)} \geq 0,$$

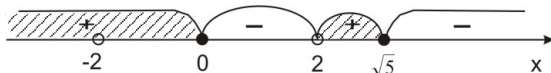
тогда

$$\frac{(x - \sqrt{5})(2x - x\sqrt{5}) \cdot 2}{(x - 2)(x + 2)^2} \geq 0$$

или

$$\frac{2(x - \sqrt{5})x(2 - \sqrt{5})}{(x - 2)(x + 2)^2} \geq 0.$$

Воспользуемся методом интервалов:



Как видно из рисунка, решением неравенства служит множество

$$(-\infty; -2) \cup (-2; 0] \cup (2; \sqrt{5}]. \blacktriangledown$$

## Логарифмические и показательные неравенства

При решении логарифмических и показательных неравенств часто применяются преобразования типа 4) из пункта 4.2. При этом следует помнить, что показательная функция  $y = a^x$  монотонно возрастает при  $a > 1$  и монотонно убывает при  $0 < a < 1$ ; логарифмическая функция  $y = \log_a x$  монотонно возрастает при  $a > 1$  и монотонно убывает при  $0 < a < 1$ . Особенно внимательным следует быть при логарифмировании и потенцировании выражений, входящих в неравенство, так как эти преобразования могут изменить ОДЗ (сузить или расширить соответственно).

**Пример 5.** Решить неравенство:

$$\log_2(1 - x) + \log_{1/2}(x + 1) < 0.$$

▲ Найдем ОДЗ:

$$\begin{cases} 1 - x > 0; \\ x + 1 > 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1; \\ x > -1. \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-1; 1).$$

1. Перейдем во втором слагаемом к основанию 2:

$$\log_2(1-x) + \frac{\log_2(x+1)}{\log_2 \frac{1}{2}} < 0;$$

$$\log_2(1-x) - \log_2(x+1) < 0.$$

2. Перейдем от разности логарифмов в логарифму частного (не забывая, что мы работаем на исходной ОДЗ):

$$\log_2 \frac{(1-x)}{(x+1)} < 0 (= \log_2 1).$$

3. Учитывая, что логарифмическая функция с основанием 2 монотонно возрастает, получаем:

$$\frac{1-x}{x+1} < 1 \quad \text{или} \quad \frac{1-x-x-1}{x+1} < 0;$$

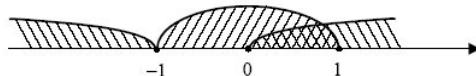
$$\frac{-2x}{x+1} < 0 \Leftrightarrow \frac{2x}{x+1} > 0.$$

4. Применим к полученному неравенству метод интервалов:



Получим  $x \in (-\infty; -1) \cup (0; +\infty)$ .

5. Учет ОДЗ исходного неравенства:



Ответ:  $x \in (0; 1)$ . ▼

**Пример 6.** Решить неравенство

$$\log_2 \log_3 \log_{1/2}(x-1) \leq 0.$$

▲ При решении таких неравенств обычно учитывают ОДЗ (не находя заранее) в процессе решения:

$$\log_2 \log_3 \log_{1/2}(x-1) \leq \log_2 1.$$

Так как логарифмическая функция с основанием 2 монотонно возрастает, то  $0 \leq \log_3 \log_{1/2}(x-1) \leq 1$  (подчеркнутая часть — учет ОДЗ: выражение под знаком логарифма должно быть положительным),

$$\log_3 1 < \log_3 \log_{1/2}(x-1) \leq \log_3 3.$$

Учитывая монотонное возрастание логарифмической функции с основанием 3, имеем

$$1 < \log_{1/2}(x-1) \leq 3;$$

$$\log_{1/2} \frac{1}{2} < \log_{1/2}(x-1) \leq \log_{1/2} \left(\frac{1}{2}\right)^3.$$

Так как логарифмическая функция с основанием  $1/2$  монотонно убывает, то

$$\frac{1}{8} \leq x-1 < \frac{1}{2}.$$

Прибавляя ко всем частям неравенства по 1, получим

$$1\frac{1}{8} \leq x < \frac{3}{2}.$$

Ответ:  $x \in [1\frac{1}{8}; \frac{3}{2})$ . ▼

**Пример 7.** Решить неравенство

$$(1/9)^{x^2-3x} - (1/3)^{x^2-3x-1} - 54 < 0.$$

▲ Найдем ОДЗ. Ясно, что ОДЗ:  $x \in R$ , т.е.  $x$  — любое действительное число.

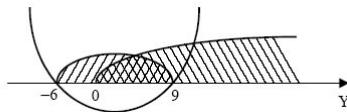
1. Преобразуем второе слагаемое

$$(1/9)^{x^2-3x} - 3 \cdot (1/3)^{x^2-3x} - 54 < 0$$

и сделаем замену  $(1/3)^{x^2-3x} = y$ . Так как показательная функция принимает только положительные значения, наше неравенство равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} y^2 - 3y - 54 < 0; \\ y > 0. \end{cases}$$

Эту систему можно решить графически:



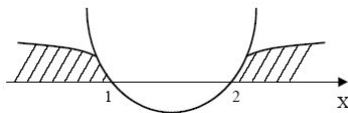
$$y \in (0; 9).$$

2. Получаем  $0 < (1/3)^{x^2-3x} < 9$ . Подчеркнутая часть выполнена всегда, значит

$$(1/3)^{x^2-3x} < 9 \Leftrightarrow (1/3)^{x^2-3x} < (1/3)^{-2}.$$

Учитывая, что показательная функция с основанием  $1/3$  монотонно убывает, получаем

$$\begin{aligned} x^2 - 3x &> -2; \\ x^2 - 3x + 2 &> 0. \end{aligned}$$



Ответ:  $x \in (-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$ . ▼

### Пример 8. Решить неравенство

$$\frac{|22 + 2x|^3 - |13 - 2x|^3}{\log_4(10 + x) - \log_4(36 - 2x)} > 0.$$

▲ Прежде всего найдем область допустимых значений неизвестной  $x$ :

$$\begin{cases} 10 + x > 0, \\ 36 - 2x > 0, \\ \log_4(10 + x) - \log_4(36 - 2x) \neq 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -10, \\ x < 18, \\ 10 + x \neq 36 - 2x. \end{cases}$$

Таким образом, область допустимых значений состоит из двух интервалов:

$$-10 < x < 18, \text{ т.е. } x \neq 26/3, x \in \left(-10; \frac{26}{3}\right) \cup \left(\frac{26}{3}; 18\right).$$

Перейдем теперь непосредственно к решению неравенства. Очевидно, что нужно рассматривать два случая: числитель и знаменатель положительны, числитель и знаменатель отрицательны.

$$а) \begin{cases} |22 + 2x|^3 - |13 - 2x|^3 > 0, \\ \log_4(10 + x) - \log_4(36 - 2x) > 0, \end{cases}$$

$$б) \begin{cases} |22 + 2x|^3 - |13 - 2x|^3 < 0, \\ \log_4(10 + x) - \log_4(36 - 2x) < 0. \end{cases}$$

Займемся сначала системой а). Ее первое неравенство можно переписать следующим образом

$$|22 + 2x|^3 > |13 - 2x|^3.$$

Но это неравенство равносильно другому неравенству

$$|22 + 2x|^2 > |13 - 2x|^2,$$

которое можно переписать так

$$(22 + 2x)^2 - (13 - 2x)^2 = 0.$$

Используя формулы сокращенного умножения для разности двух квадратов, получим

$$(22 + 2x + 13 - 2x)(22 + 2x - 13 + 2x) > 0.$$

Отсюда

$$35 \cdot (9 + 4x) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x > -9/4.$$

Второе неравенство системы а) можно записать так

$$\log_4(10 + x) > \log_4(36 - 2x).$$

Отсюда следует, что

$$10 + x > 36 - 2x \quad \Leftrightarrow \quad x > 26/3.$$

С учетом области допустимых значений система а) имеет решение  $26/3 < x < 18$ .

Чтобы получить решение первого неравенства системы б) нужно проделать те же самые выкладки, что и для системы а), но со знаком «<» вместо «>». Поэтому первое неравенство имеет решение  $x < -9/4$ , а второе —  $-10 < x < 26/3$ . Следовательно, система б) имеет решение

$$-10 < x < -9/4.$$

Ответ.  $\left(-10; -\frac{9}{4}\right) \cup \left(\frac{26}{3}; 18\right)$ . ▼

### Пример 9. Решить неравенство

$$\log_{\frac{|x|}{8}} x^6 + \log_{\frac{2}{|x|}} x^2 \leq 0.$$

▲ ОДЗ  $x \neq 0$ ,  $x \neq 8$ ,  $x \neq \pm 2$ .

Вначале запишем исходное неравенство в следующей равносильной форме:

$$6 \cdot \log_{\frac{|x|}{8}} |x| + 2 \cdot \log_{\frac{2}{|x|}} |x| \leq 0,$$

После этого, переходя в каждом логарифме к новому основанию 2 и применяя формулу логарифма частного, получим цепочку равносильных неравенств:

$$\frac{3 \log_2 |x|}{\log_2 |x| - 3} + \frac{\log_2 |x|}{1 - \log_2 |x|} \leq 0, \quad \frac{\log_2^2 |x|}{(3 - \log_2 |x|)(1 - \log_2 |x|)} \leq 0.$$

Вводя новую переменную  $t = \log_2 |x|$  и решая неравенство

$$\frac{t^2}{(3 - t)(1 - t)} \leq 0$$

методом интервалов, будем иметь:

$$\begin{cases} t = 0 \\ 1 < t < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 |x| = 0 \\ 1 < \log_2 |x| < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x| = 1 \\ 2 < |x| < 8 \end{cases}$$

Ответ:  $x \in \{-1\} \cup \{1\} \cup (2; 8) \cup (-8; -2)$ . ▼

### Пример 10. Решить неравенство

$$\log_{\log_x 0,5} 4 + \log_{0,5} \log_x 0,5 + 1 \leq 0.$$

▲ Найдем ОДЗ данного неравенства:

$$\begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1, \\ \log_x 0,5 > 0, \\ \log_x 0,5 \neq 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1, \\ 0 < x < 1, \\ x \neq \frac{1}{2}, \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left(0; \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; 1\right).$$

Используя формулу перехода к новому основанию, преобразуем условие к следующему виду:

$$\frac{2}{\log_2 \log_x 0,5} - \log_2 \log_x 0,5 + 1 \leq 0.$$

После замены переменной  $\log_2 \log_x 0,5 = t$ , последнее неравенство примет вид:

$$\frac{t^2 - t - 2}{t} \geq 0, \quad \frac{(t-2)(t+1)}{t} \geq 0.$$

Решая его методом интервалов, будем иметь  $t \in [-1; 0) \cup [2; +\infty)$ .

Теперь, возвращаясь к логарифмам, придем к цепочке равносильных совокупностей неравенств:

$$\begin{cases} -1 \leq \log_2 \log_x 0,5 < 0, \\ \log_2 \log_x 0,5 \geq 2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} \leq \log_x 0,5 < 1, \\ \log_x 0,5 \geq 4, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [\frac{1}{4}; 0,5), \\ x \in [\frac{1}{\sqrt[4]{2}}; 1). \end{cases}$$

Находя пересечение с ОДЗ, получим:  $x \in [\frac{1}{4}; \frac{1}{2}) \cup [\frac{1}{\sqrt[4]{2}}; 1)$ .

Ответ:  $x \in [\frac{1}{4}; \frac{1}{2}) \cup [\frac{1}{\sqrt[4]{2}}; 1)$ . ▼

# Элементарная математика в примерах и задачах (обучающий модуль). Часть 3

10 декабря 2007 г.

## Иррациональные уравнения

Уравнение, содержащее неизвестное под знаком радикала, называется иррациональным. Решение иррациональных уравнений следует начинать с определения их ОДЗ. При этом необходимо иметь в виду, что радикалы четных степеней, входящие в уравнение, являются арифметическими и имеют смысл, если подкоренное выражение неотрицательно, а радикалы нечетных степеней определены при любом действительном значении подкоренного выражения. В ряде случаев уже определение ОДЗ уравнения и анализ поведения на ОДЗ входящих в уравнение функций позволяет установить, что оно не имеет решения.

**Пример 1.**  $\sqrt{x-4} - \sqrt{x+10} = \sqrt{x-1}$ .

▲ ОДЗ уравнения найдем из условий  $x-4 \geq 0$ ,  $x+10 \geq 0$ ,  $x-1 \geq 0$ :  
ОДЗ =  $[4; +\infty)$ . Воспользуемся тем, что в своей естественной области определения  $\sqrt{x}$  является возрастающей функцией. Так как для любого  $x$  из  $R$   $x-4 < x+10$ , то на ОДЗ  $\sqrt{x-4} < \sqrt{x+10}$  и, значит, левая часть уравнения меньше нуля. Так как правая часть уравнения на ОДЗ больше нуля, оно не имеет решения.

Ответ: решений нет. ▼

Стандартный метод решения иррациональных уравнений состоит в сведении их к рациональным алгебраическим уравнениям путем возведения (возможно неоднократного) обеих частей уравнений в натуральную степень. Если эта степень нечетная, то получается уравнение, равносильное исходному, если четная, то могут появиться «посторонние» корни, при этом ОДЗ, вообще говоря, расширяется. В связи с этим необходимо проверять, являются ли данные корни решениями исходного уравнения. Так как эта проверка является достаточно громоздкой, целесообразно начать с выявления принадлежности их ОДЗ исходного уравнения. Но этим ограничиться нельзя. **Необходимо проверить, удовлетворяют ли корни, принадлежащие ОДЗ, самому исходному уравнению.** Следующие три примера иллюстрируют разнообразие возникающих при этом ситуаций.

**Пример 2.**  $\sqrt{x+1} + \sqrt{x+4} = \frac{1}{2}\sqrt{17x+36}$ .

▲ ОДЗ уравнения определяется условиями  $x+1 \geq 0$ ,  $x+4 \geq 0$ ,  $17x+36 \geq 0$ , т.е.  $\text{ОДЗ} = [-1; +\infty)$ . Возводя обе части уравнения в квадрат и осуществляя стандартные преобразования, получаем

$$8\sqrt{x+1}\sqrt{x+4} = 9x + 16.$$

Повторное возведение в квадрат приводит к квадратному уравнению

$$64(x^2 + 5x + 4) = 81x^2 + 228x + 256, \text{ или } 17x^2 - 32x = 0,$$

корни которого  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 32/17$  принадлежат ОДЗ. Проверяем, удовлетворяют ли они исходному уравнению. Равенства

$$\sqrt{1} + \sqrt{4} = \frac{1}{2}\sqrt{36},$$

$$\sqrt{\frac{32}{17} + 1} + \sqrt{\frac{32}{17} + 4} = \frac{7}{\sqrt{17}} + \frac{10}{\sqrt{17}} = \sqrt{17} = \frac{1}{2}\sqrt{68}$$

показывают, что  $x_1$  и  $x_2$  являются корнями исходного уравнения.

Ответ:  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 32/17$ . ▼

**Пример 3.**  $\sqrt{1 - 5x} - \sqrt{4 - x} = \sqrt{1 - x}$ .

▲ ОДЗ определяем из условий  $1 - 5x \geq 0$ ,  $4 - x \geq 0$ ,  $1 - x \geq 0$ , т.е.

ОДЗ =  $(-\infty; 1/5]$ . Повторяя процедуру решения примера 2, получаем вначале уравнение

$$-2\sqrt{1 - 5x} \cdot \sqrt{4 - x} = 5x - 4,$$

а вслед за ним квадратное уравнение  $5x^2 + 44x = 0$ , корни которого  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = -44/5$  принадлежат ОДЗ, но при этом  $x_1$  не является решением исходного уравнения, так как  $\sqrt{1} - \sqrt{4} \neq 1$ , а  $x_2$  таковым является, так как

$$\sqrt{1+44} - \sqrt{4 + \frac{44}{5}} = \frac{15}{\sqrt{5}} - \frac{8}{\sqrt{5}} = \frac{7}{\sqrt{5}} = \sqrt{1 + \frac{44}{5}}.$$

Ответ:  $x = -44/5$ . ▼

**Пример 4.**  $\sqrt{1-3x} - \sqrt{4-x} = \sqrt{1-x}$ .

▲ Легко проверить, что ОДЗ =  $(-\infty; 1/3]$ . Соответствующее уравнение с радикалами только в левой части принимает вид

$$-2\sqrt{1-3x}\sqrt{4-x} = 3x - 4,$$

а квадратное уравнение  $3x^2 - 28x = 0$  имеет корни  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 28/3$ . Корень  $x_2$  не содержится в ОДЗ, а корень  $x_1$  содержится в ОДЗ, но не является решением исходного уравнения, так как  $\sqrt{1} - \sqrt{4} \neq \sqrt{1}$ , т.е. уравнение решений не имеет.

Ответ: решений нет. ▼

Другие методы решения уравнений в радикалах читатель найдет в справочном руководстве [6]. Здесь же мы продемонстрируем метод замены в применении к уравнениям с двумя радикалами, сводящий их к линейным системам с двумя неизвестными.

**Пример 5.**  $\sqrt[3]{2x-1} = \sqrt{1-x}$ .

▲ ОДЗ уравнения имеет вид  $\{1-x \geq 0\} = (-\infty; 1]$ . Проведем следующую замену переменных  $\sqrt[3]{2x-1} = v$ ,  $\sqrt{1-x} = u$ .

Поскольку  $v^3 + 2u^2 = 1$ , то для  $v$  и  $u$  получим следующую нелинейную систему уравнений

$$\begin{cases} v = u, \\ v^3 + 2u^2 = 1, \quad \text{где } u \geq 0. \end{cases}$$

Уравнение относительно  $u$  имеет вид  $u^3 + 2u^2 - 1 = 0$ . Так как  $u^3 + 2u^2 - 1 = (u+1)(u^2 + u - 1)$ , то его корнями будут  $u_1 = -1$ ,  $u_2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ ,  $u_3 = \frac{-\sqrt{5}-1}{2}$ . Отбрасывая «лишние» корни  $u_1$  и  $u_3$ , получаем, что исходное уравнение равносильно уравнению

$$\sqrt{1-x} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Решая его, находим  $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ .

Ответ:  $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$  ▼

**Пример 6.** Решить уравнение для всех значений параметра  $b$ . Указать, при каких значениях  $b$  решение уравнения единственно

$$2^{x+\frac{1}{2}} = \sqrt{8} + \sqrt{2^x - b}.$$

▲ Перепишем уравнение в виде

$$2^{x+\frac{1}{2}} - \sqrt{8} = \sqrt{2^x - b}.$$

Обозначим  $2^x = t$  ( $t > 0$ ). Получим иррациональное уравнение

$$\sqrt{t - b} = \sqrt{2}(t - 2).$$

Это уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} t - 2 \geq 0, \\ t - b = 2(t - 2)^2 \end{cases} (*) \begin{cases} t \geq 2, \\ 2t^2 - 9t + 8 + b = 0 \end{cases}$$

Исследуем квадратное уравнение. Для этого найдем его дискриминант:

$$D = 81 - 64 - 8b = 17 - 8b.$$





Так как  $\sqrt{a^2} = |a|$ , то

$$t - |t - 2| = 2$$

или

$$|t - 2| = t - 2.$$

Это равенство имеет место тогда и только тогда, когда

$$t - 2 \geq 0.$$

Так как  $t = \sqrt{x - 1}$ , то  $\sqrt{x - 1} \leq 2$ .

Это неравенство равносильно неравенству

$$x - 1 \geq 4$$

или

$$x \geq 5.$$

Следует заметить, что все преобразования были равносильными. Поэтому ни потери, ни приобретения посторонних решений не произошло.

Ответ:  $x \geq 5$ . ▼

**Пример 8.** Решить уравнение

$$\frac{\sqrt[3]{\sqrt{2} - x}}{x^2} - \frac{\sqrt[3]{\sqrt{2} - x}}{2} = \frac{1}{2x} \cdot \sqrt[3]{\frac{x}{\sqrt{2} + x}}.$$

▲ Заметим, что  $x = \sqrt{2}$  не является корнем уравнения, и освободимся от иррациональности в знаменателе под корнем в правой части уравнения, умножив числитель и знаменатель дроби на  $x - \sqrt{2}$ :

$$\frac{\sqrt[3]{\sqrt{2}-x}}{x^2} - \frac{\sqrt[3]{\sqrt{2}-x}}{2} = \frac{1}{2x} \sqrt[3]{\frac{x(\sqrt{2}-x)}{2-x^2}}$$

Перенесем все слагаемые в левую часть уравнения и вынесем общий множитель

$$\sqrt[3]{\sqrt{2}-x} \left( \frac{1}{x^2} - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt[3]{x}}{2x\sqrt[3]{2-x^2}} \right) = 0$$

Так как  $x \neq \sqrt{2}$ , то получим уравнение:

$$\frac{2\sqrt[3]{2-x^2} - x^2\sqrt[3]{2-x^2} - x\sqrt[3]{x}}{2x^2\sqrt[3]{2-x^2}} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} (2-x^2)\sqrt[3]{2-x^2} - x\sqrt[3]{x} = 0, \\ x \neq 0, \\ x \neq \pm\sqrt{2}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2-x^2)^{\frac{4}{3}} = x^{\frac{4}{3}}, \\ x \neq 0, \\ x \neq \pm\sqrt{2}. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (2 - x^2)^4 = x^4, \\ x \neq 0, \\ x \neq \pm\sqrt{2}. \end{cases}$$

Напомним, что  $\sqrt[4]{a^4} = |a|$ , поэтому  $|2 - x^2| = |x|$ , что равносильно совокупности двух уравнений

$$\begin{cases} x^2 + x - 2 = 0, \\ x^2 - x - 2 = 0. \end{cases}$$

Ответ:  $x_1 = -2$ ,  $x_2 = 1$ ,  $x_3 = 2$ ,  $x_4 = -1$ . ▼

**Пример 9.** Решить уравнение

$$\sqrt{x^2 - 3x} \cdot 3^{\sqrt{2-x}} + \frac{2}{3^x} = \sqrt{x^2 - 3x} \cdot \frac{1}{3^x} + 2 \cdot 3^{\sqrt{2-x}}.$$

▲ Перенесем все слагаемые в левую часть уравнения и сгруппируем их следующим образом

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 - 3x} \left( 3^{\sqrt{2-x}} - \frac{1}{3^x} \right) - 2 \left( 3^{\sqrt{2-x}} - \frac{1}{3^x} \right) &= 0, \\ (\sqrt{x^2 - 3x} - 2) \left( 3^{\sqrt{2-x}} - \frac{1}{3^x} \right) &= 0 \end{aligned}$$

Учтем ОДЗ и рассмотрим два случая:

$$1) \begin{cases} x^2 - 3x \geq 0, \\ 2 - x \geq 0, \\ \sqrt{x^2 - 3x} = 2. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0, \\ x^2 - 3x - 4 = 0. \end{cases}$$

Решением последней системы служит  $x = -1$ .

$$2) \begin{cases} x^2 - 3x \geq 0, \\ 2 - x \geq 0, \\ 3^{\sqrt{2-x}} = 3^{-x}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x \geq 0, \\ 2 - x \geq 0, \\ -x \geq 0, \\ 2 - x = x^2. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x \geq 0, \\ x \leq 0, \\ x^2 + x - 2 = 0. \end{cases}$$

Решением последней системы служит  $x = -2$ .

Ответ:  $x_1 = -1$ ,  $x_2 = -2$ . ▼

**Пример 10.** Решить уравнение

$$2\sqrt{x^2 - 4x + 4} + \sqrt{4 - 2x} = \sqrt{x^2 - 8x + 12}.$$

▲ Применяя формулу разложения квадратного трехчлена на множители, перепишем исходное уравнение в виде:

$$2\sqrt{(x-2)^2} + \sqrt{2(2-x)} = \sqrt{(x-2)(x-6)}$$

или в равносильной форме:

$$2\sqrt{(2-x)^2} + \sqrt{2(2-x)} = \sqrt{(2-x)(6-x)}$$

Легко видеть, что ОДЗ данного уравнения есть множество  $(-\infty; 2]$ .

Теперь, перенося все слагаемые в левую часть уравнения и вынося  $\sqrt{2-x}$  за общую скобку, будем иметь:

$$\sqrt{2-x} (2\sqrt{2-x} + \sqrt{2} - \sqrt{6-x}) = 0$$

Полученное уравнение равносильно совокупности уравнений:

$$\begin{cases} \sqrt{2-x} = 0 \\ 2\sqrt{2-x} + \sqrt{2} = \sqrt{6-x} \end{cases}$$

Первое уравнение имеет решение  $x = 2$ . Возводя обе части второго уравнения в квадрат, приходим к равенству:

$$4\sqrt{4-2x} = 3x - 4$$

Отметим, что до настоящего момента применялись только равносильные для  $x \in \text{ОДЗ}$  преобразования. Возводя обе части последнего равенства в квадрат и, учитывая, что его правая часть должна быть неотрицательна, сведем это уравнение к равносильной для  $x \in \text{ОДЗ}$  системе:

$$\begin{cases} 3x - 4 \geq 0 \\ 9x^2 + 8x - 48 = 0 \end{cases}$$

Корни полученного квадратного уравнения имеют вид:

$$x = \frac{-4 + 8\sqrt{7}}{9}, \frac{-4 - 8\sqrt{7}}{9}$$

Второй корень не удовлетворяет неравенству  $3x - 4 \geq 0$ .

Ответ:  $x = 2$ ,  $x = \frac{8\sqrt{7}-4}{9}$ . ▼

**Пример 11.** Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x - \sqrt{x - y} = 1 \\ 1,8x^2 + x - 1 = 3x\sqrt{x - y} + y \end{cases}$$

▲ Систему уравнений будем решать методом подстановки. Выражая из первого уравнения системы  $y$  через  $x$ :  $y = 3x - x^2 - 1$  и подставляя результат во второе уравнение, приходим к равенству:

$$0,2x^2 - x = 0$$

В результате получим  $x = 0$ ;  $y = -1$  и  $x = 5$ ;  $y = -11$ . Проверка показывает, что первое решение является посторонним.

Ответ:  $x = 5$ ,  $y = -11$ . ▼

## Иррациональные неравенства

Решение иррациональных неравенств, так же как и иррациональных уравнений, осуществляется сведением их к рациональным неравенствам. Как правило, для этого приходится возводить обе части неравенства в натуральную степень. При этом при возведении обеих частей неравенства в нечетную степень получается неравенство, равносильное исходному, а при возведении в четную равносильное неравенство получается только в том случае, если обе части исходного неравенства неотрицательны. Несмотря на то, что процедуры решения иррациональных неравенств и уравнений похожи, между ними имеется существенное отличие. Решением неравенства обычно является бесконечное множество чисел, в связи с чем проверка подстановкой чаще всего невозможна, а гарантией правильного ответа является применение равносильных преобразований либо на всей ОДЗ, либо на ее частях.

**Пример 12.**  $\frac{\sqrt{2-x}+4x-3}{x} \geq 2$ .

▲ ОДЗ неравенства определяется условиями  $2-x \geq 0$  и  $x \neq 0$  и состоит из двух частей  $(-\infty; 0) \cup (0; 2]$ .

1. На множестве  $(-\infty; 0)$  исходное неравенство равносильно неравенству (проверьте это сами!)

$$\sqrt{2-x} + 4x - 3 \leq 2x \quad \text{или} \quad \sqrt{2-x} \leq 3 - 2x.$$

Так как обе части последнего неравенства на рассматриваемом множестве положительны ( $\sqrt{2-x}$  — арифметический корень), то возведение его обеих частей в квадрат приводит к равносильному неравенству

$$2 - x \leq (3 - 2x)^2 \quad \text{или} \quad 4x^2 - 11x + 7 \geq 0.$$

Множество решений этого неравенства имеет вид

$$(-\infty; 1) \cup (7/4; +\infty).$$

Учитывая ОДЗ, получим, что множество  $(-\infty; 0)$  является решением исходного неравенства.

2. На множестве  $(0; 2]$  исходное неравенство равносильно неравенству

$$\sqrt{2-x} + 4x - 3 \geq 2x \quad \text{или} \quad \sqrt{2-x} \geq 3 - 2x.$$

Для его правой части переменна знака происходит при  $x = 3/2$ . Разбивая промежуток  $(0; 2]$  на две части  $(0; 3/2]$  и  $(3/2; 2)$ , рассматриваем последнее неравенство на каждой из этих частей в отдельности.

а) Для  $0 < x \leq 3/2$  равносильное неравенство имеет вид

$$(2 - x) \geq (3 - 2x)^2,$$

а его решением на  $R$  является отрезок  $[1; 7/4]$ . Следовательно, решением исходного неравенства будет множество

$$[1; 7/4] \cap (0; 3/2] = [1; 3/2].$$

б) Для  $3/2 < x \leq 2$  правая часть  $3 - 2x$  неравенства отрицательна, поэтому оно верно для всех  $x$  из  $(3/2; 2]$ .

Решение исходного неравенства получаем объединением множеств  $(-\infty; 0)$ ,  $[1; 3/2]$ ,  $(3/2; 2]$ .

Ответ:  $x \in (-\infty; 0) \cup [1; 2]$ . ▼

**Пример 13.** Решить неравенство

$$\sqrt{28 + 12x - x^2} - \sqrt{x^2 - 2x - 8} \leq \sqrt{x^2 + x - 2}.$$

▲ Разложим подкоренные выражения на множители:

$$\sqrt{-(x+2)(x-14)} - \sqrt{(x+2)(x-4)} \leq \sqrt{(x+2)(x-1)}$$

Найдем ОДЗ:

$$\begin{cases} -2 \leq x \leq 14, \\ x \leq -2; x \geq 4, \\ x \leq -2; x \geq 1, \end{cases} \Leftrightarrow x = -2, \quad 4 \leq x \leq 14.$$

Подстановкой в неравенство убеждаемся, что  $x = -2$ , очевидно, является решением неравенства. На отрезке  $[4; 14]$  данное неравенство равносильно неравенству

$$\sqrt{-(x-14)} - \sqrt{x-4} \leq \sqrt{x-1}, \text{ или}$$

$$\sqrt{14-x} \leq \sqrt{x-4} + \sqrt{x-1}.$$

Так как правая и левая части последнего неравенства неотрицательны, то, возведя их в квадрат, получим равносильное неравенство

$$14 - x \leq 2x + 2\sqrt{(x-4)(x-1)} - 5 \quad \text{или} \quad -3x + 19 \leq 2\sqrt{(x-4)(x-1)}.$$

Теперь рассмотрим два случая. Первый случай (с учетом ОДЗ)

$$\begin{cases} -3x + 19 \geq 0, \\ 4 \leq x \leq 14, \\ 9x^2 - 114x + 361 \leq 4(x^2 - 5x + 4). \end{cases}$$

Решение системы дается следующей цепочкой равносильных преобразований

$$\begin{aligned} \begin{cases} 4 \leq x \leq \frac{19}{3}, \\ 5x^2 - 94x + 345 \leq 0, \end{cases} & \Leftrightarrow \begin{cases} 4 \leq x \leq \frac{19}{3}, \\ \frac{47-22}{5} \leq x \leq \frac{47+22}{5}, \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 4 \leq x \leq \frac{19}{3}, \\ 5 \leq x \leq \frac{69}{5}, \end{cases} & \Leftrightarrow 5 \leq x \leq \frac{19}{3}. \end{aligned}$$

Теперь рассмотрим второй случай (с учетом ОДЗ)

$$\begin{cases} -3x + 19 < 0, \\ 4 \leq x \leq 14, \\ -3x + 19 \leq 2\sqrt{(x-4)(x-1)}. \end{cases}$$

Последняя система имеет решения  $\frac{19}{3} < x \leq 14$ . Заметим, что решения первого и второго случая «склеиваются» в один отрезок  $[5; 14]$ .

Ответ:  $\{-2\} \cup [5; 14]$  ▼

**Пример 14.** Решить неравенство

$$\log_{\frac{|x-1|}{2}} 8 + \log_{\frac{|x-1|}{4}} 8 \geq \frac{\log_2(x-1)^2}{\log_2(x-1)^2 - 4}.$$

▲ Перейдем к логарифмам по основанию 2 и воспользуемся тождеством  $\log_2(x-1)^2 = 2\log_2|x-1|$ :

$$\begin{cases} x \neq 1, \\ \frac{|x-1|}{2} \neq 1, \\ \frac{|x-1|}{4} \neq 1, \\ \frac{1}{\frac{1}{3} \log_2 \frac{|x-1|}{2}} + \frac{1}{\frac{1}{3} \log_2 \frac{|x-1|}{4}} \geq \frac{2 \log_2 |x-1|}{2 \log_2 |x-1|-4}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \neq \pm 1, \\ x \neq \pm 3, \\ x \neq 5, \\ \frac{3}{\log_2 |x-1|-1} + \frac{3}{\log_2 |x-1|-2} \geq \frac{\log_2 |x-1|}{\log_2 |x-1|-2}. \end{cases}$$

Введём новую переменную  $t = \log_2 |x-1|$  и решим неравенство

$$\frac{3}{t-1} + \frac{3}{t-2} \geq \frac{t}{t-2}.$$

Перенесём все слагаемые в левую часть неравенства и приведём к общему знаменателю:

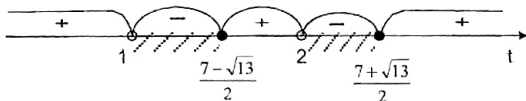
$$\frac{3(t-2)+(3-t)(t-1)}{(t-1)(t-2)} \geq 0, \quad \frac{3t-6+3t-3-t^2+t}{(t-1)(t-2)} \geq 0,$$

$$\frac{-t^2+7t-9}{(t-1)(t-2)} \geq 0, \quad \frac{t^2-7t+9}{(t-1)(t-2)} \leq 0.$$

Разложим числитель дроби на множители:

$$\frac{\left(t - \frac{7-\sqrt{13}}{2}\right)\left(t - \frac{7+\sqrt{13}}{2}\right)}{(t-1)(t-2)} \leq 0$$

Решим неравенство методом интервалов:



$$1) \ 1 < \log_2 |x-1| \leq \frac{7-\sqrt{13}}{2}, \quad 2) \ 2 < |x-1| \leq 2^{\frac{7-\sqrt{13}}{2}},$$

последнее двойное неравенство равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} x - 1 > 2, & x - 1 < 2, \\ -2^{\frac{7-\sqrt{13}}{2}} \leq x - 1 \leq 2^{\frac{7-\sqrt{13}}{2}}, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x > 3, & x < -1 \\ 1 - 2^{\frac{7-\sqrt{13}}{2}} \leq x \leq 1 + 2^{\frac{7-\sqrt{13}}{2}}. \end{cases}$$

Решением последней системы служит множество

$$\left[1 - 2^{\frac{7-\sqrt{13}}{2}}; -1\right) \cup \left(3; 1 + 2^{\frac{7-\sqrt{13}}{2}}\right]$$

$$2) \quad 2 < \log_2 |x - 1| \leq \frac{7 + \sqrt{13}}{2}, \quad 4 < |x - 1| \leq 2^{\frac{7+\sqrt{13}}{2}}.$$

Последнее двойное неравенство равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} x - 1 < -4, & x - 1 > 4, \\ -2^{\frac{7+\sqrt{13}}{2}} \leq x - 1 \leq 2^{\frac{7+\sqrt{13}}{2}}, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x < -3, & x > 5 \\ 1 - 2^{\frac{7+\sqrt{13}}{2}} \leq x \leq 1 + 2^{\frac{7+\sqrt{13}}{2}}. \end{cases}$$

Решением последней системы служит множество

$$\left[1 - 2^{\frac{7+\sqrt{13}}{2}}; -3\right) \cup \left(5; 1 + 2^{\frac{7+\sqrt{13}}{2}}\right)$$

Ответ:

$$x \in \left[1 - 2^{\frac{7+\sqrt{13}}{2}}; -3\right) \cup \left[1 - 2^{\frac{7-\sqrt{13}}{2}}; -1\right) \cup \left(3; 1 + 2^{\frac{7-\sqrt{13}}{2}}\right] \cup \left(5; 1 + 2^{\frac{7+\sqrt{13}}{2}}\right]. \blacktriangledown$$



## Уравнения и неравенства с модулями

Напомним, что по определению модуля

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{если } a > 0, \\ 0, & \text{если } a = 0, \\ -a, & \text{если } a < 0. \end{cases}$$

Если уравнение или неравенство содержит функции под знаком модуля, то чтобы освободиться от него, ОДЗ разбивается на множества, на каждом из которых все функции, стоящие под знаком модуля, сохраняют знак. После этого исходное уравнение (неравенство) распадается на совокупность уравнений (неравенств), каждое из которых уже не содержит знака модуля и является ограничением исходного уравнения (неравенства) на одно из указанных выше множеств. Объединение множеств решений всех полученных таким образом уравнений (неравенств) является решением исходного уравнения (неравенства).

**Пример 16.**  $|x - 1| + |x - 2| = 1$ .

▲ *Первый способ решения.* ОДЗ =  $R$  и разбивается точками  $x_1 = 1$  и  $x_2 = -2$  на три части:

$$R = (-\infty; 1) \cup [1; 2] \cup (2; = \infty).$$

Отметим интервалы знакопостоянства функций  $y = x - 1$  и  $y = x - 2$  на следующем рис. 39.

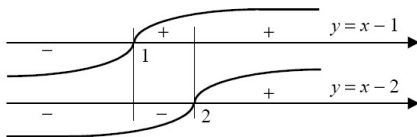


Рис. 39

При снятии модуля на промежутке со знаком «-» соответствующую функцию нужно умножить на  $-1$ , а на промежутке со знаком «+» оставить ее без изменений.

- ❶ На  $(-\infty; 1)$  уравнение имеет вид  $-x + 1 - x + 2 = 1$  или  $2x = 2$ . Его корень  $x = 1$  этому множеству не принадлежит.
- ❷ На  $[1; 2]$  уравнение принимает вид  $x - 1 - x + 2 = 1$  или  $1 = 1$ , т.е. отрезок  $[1; 2]$  целиком состоит из решений уравнения.
- ❸ На  $(2; +\infty)$  уравнение принимает вид  $x - 1 + x - 2 = 1$  или  $2x = 4$ . Его корень  $x = 2$  рассматриваемому множеству не принадлежит.

Ответ:  $x \in [1; 2]$ .

*Второй способ решения.* Представим уравнение в виде

$$|x - 1| = 1 - |x - 2|.$$

Решением его будет множество тех значений  $x$ , для которых график функций  $y = |x - 1|$  и  $y = 1 - |x - 2|$  совпадают. Нарисовав эти графики в одной системе координат (рис. 40), замечаем, что искомое множество есть  $[1; 2]$ .

Ответ:  $x \in [1; 2]$ . ▼

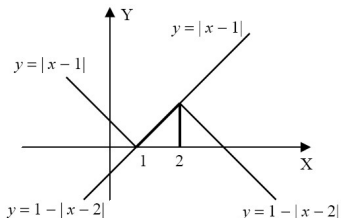


Рис. 40

В рассмотренном примере уравнение достаточно просто решается графическим методом. Если функции, входящие в уравнение или неравенство, имеют более сложный вид, графический метод не столь эффективен, но геометрическая прикидка часто позволяет упростить решение.

**Пример 17.**  $|3x^2 - 3| \geq |\frac{1}{2}(x+1)^2 - 2|$ .

▲ Построим графики функций

$$y = |3x^2 - 3| \quad \text{и} \quad y = |\frac{1}{2}(x+1)^2 - 2|.$$

Первая функция имеет нули  $x_{1,2} = \pm 1$ , а ее график на рис. 41 изображен *пунктиром*. Вторая функция имеет нули  $x_1 = -3$ ,  $x_2 = 1$ , а ее график на рис. 41 изображен *сплошной линией*. Решение неравенства составляют все те значения  $x$ , при которых пунктирная кривая лежит выше сплошной кривой или совпадает с ней. Из рис. 41 следует, что множество решений имеет вид  $(-\infty; x'] \cup [x''; +\infty)$ . Для определения точек  $x'$  и  $x''$  достаточно рассмотреть уравнение

$$|3x^2 - 3| = \left| \frac{1}{2}(x+1)^2 - 2 \right|$$

на отрезках  $[-3; -1]$  и  $[-1; 0]$ .

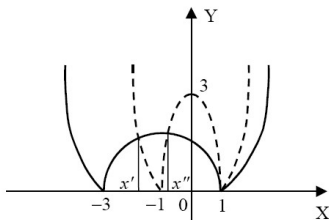


Рис. 41

Как следует из рис. 41, на отрезке  $[-3; -1]$  у функций

$$y = 3x^2 - 3 \text{ и } y = \frac{1}{2}(x+1)^2 - 2$$

разные знаки. Поэтому уравнение для определения  $x'$  принимает вид

$$3x^2 - 3 = \frac{1}{2}(x+1)^2 + 2 \text{ или } 7x^2 + 2x - 9 = 0.$$

Откуда  $x'_{1,2} = \frac{-1 \pm 8}{7}$ , т.е.  $x' = -\frac{9}{7}$ .

На отрезке  $[-1; 0]$  у функций, стоящих под знаком модуля, одинаковые знаки. Поэтому уравнение для определения  $x''$  принимает вид

$$3x^2 - 3 = \frac{1}{2}(x+1)^2 - 2 \text{ или } 5x^2 - 2x - 3 = 0.$$

Откуда  $x''_{1,2} = \frac{1 \pm 4}{5}$ , т.е.  $x'' = -\frac{3}{5}$ .

Ответ:  $x \in (-\infty; -9/7) \cup [-3/5; = \infty)$ . ▼

**Пример 18.** Решить неравенство

$$|\sqrt{3x^2 - 2x + 2} - 2x - 3| \leq x + 1.$$

▲ Так как в левой части неравенства стоит неотрицательное выражение, то следует рассматривать только те значения  $x$ , для которых  $x + 1 \geq 0$  (в противном случае получим неверное неравенство). А тогда, используя геометрический смысл модуля выражения и учитывая ОДЗ, приходим к решению следующей системы неравенств:

$$\begin{cases} -x - 1 \leq \sqrt{3x^2 - 2x + 2} - 2x - 3 \leq x + 1, \\ x + 1 \geq 0, \\ 3x^2 - 2x + 2 \geq 0. \end{cases}$$

Последнее неравенство верно для всех  $x \in \mathbb{R}$ , так как  $D = 4 - 4 \cdot 3 \cdot 2 < 0$ , и  $3 > 0$ . Первое двойное неравенство равносильно системе двух неравенств:

$$\begin{cases} \sqrt{3x^2 - 2x + 2} \leq 3x + 4, \\ \sqrt{3x^2 - 2x + 2} \geq x + 2, \\ x + 1 \geq 0. \end{cases}$$

Так как  $x + 1 \geq 0$ , то также

$$x + 2 > 0 \quad \text{и} \quad 3x + 4 = 3(x + 1) + 1 > 0.$$

Поэтому обе части каждого из иррациональных неравенств можно возвести в квадрат и получим следующую систему:

$$\begin{cases} 3x^2 - 2x + 2 \leq 9x^2 + 24x + 16, \\ 3x^2 - 2x + 2 \geq x^2 + 4x + 4, \\ x \geq -1. \end{cases}$$

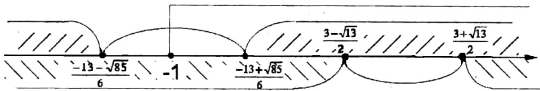
После упрощений она примет вид:

$$\begin{cases} 6x^2 + 26x + 14 \geq 0, \\ 2x^2 - 6x - 2 \geq 0, \\ x \geq -1 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} 3x^2 + 13x + 7 \geq 0, \\ x^2 - 3x - 1 \geq 0, \\ x \geq -1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3\left(x - \frac{-13-\sqrt{85}}{6}\right)\left(x - \frac{-13+\sqrt{85}}{6}\right) \geq 0, \\ \left(x - \frac{3-\sqrt{13}}{2}\right)\left(x - \frac{3+\sqrt{13}}{2}\right) \geq 0, \\ x \geq -1, \end{cases}$$



Ответ:  $\left[\frac{-13+\sqrt{85}}{6}; \frac{3-\sqrt{13}}{2}\right] \cup \left[\frac{3+\sqrt{13}}{2}; \infty\right)$ . ▼

### Пример 19. Решить неравенство

$$\log_{4^{\frac{x}{9}}-1} \sqrt{5-x} \leq \log_{4^{\frac{x}{9}}-1} |x-3|.$$

▲ ОДЗ

$$\begin{cases} 4^{\frac{x}{9}} > 1 \\ 4^{\frac{x}{9}} \neq 2 \\ 5-x > 0 \\ x-3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq \frac{9}{2} \\ x < 5 \\ x \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (0; 3) \cup (3; 4,5) \cup (4,5; 5).$$

Заметим, что для  $x \in (0; 3) \cup (3; 4,5)$  основание логарифма  $4^{\frac{x}{9}} - 1 < 1$ , а для  $x \in (4,5; 5)$ , напротив,  $4^{\frac{x}{9}} - 1 > 1$ . Следовательно, данное неравенство сводится к совокупности двух систем:

$$1) \begin{cases} x \in (0; 3) \cup (3; 4,5), \\ \sqrt{5-x} \geq |x-3|, \end{cases} \quad \text{или} \quad 2) \begin{cases} x \in (4,5; 5), \\ \sqrt{5-x} \leq |x-3|. \end{cases}$$

Раскрывая модули, получим:

$$1.1) \begin{cases} x \in (0; 3), \\ \sqrt{5-x} \geq 3-x, \end{cases} \quad \text{или} \quad 1.2) \begin{cases} x \in (3; 4,5), \\ \sqrt{5-x} \geq x-3, \end{cases} \quad \text{или} \quad 2) \begin{cases} x \in (4,5; 5), \\ \sqrt{5-x} \leq x-3. \end{cases}$$

Остановимся на решении первой системы. Возводя обе части иррационального неравенства в квадрат, приходим к квадратичному неравенству:

$$x^2 - 5x + 4 \leq 0$$

Решая его методом интервалов и находя пересечение с интервалом  $(0; 3)$ , получим:  $x \in [1; 3)$ . По аналогии решаются две другие системы. Решение второй системы:  $x \in (3; 4]$ , решение третьей:  $x \in (4,5; 5)$ .

Ответ:  $x \in [1; 3) \cup (3; 4] \cup (4,5; 5)$ . ▼

**Пример 20.** Решить неравенство

$$\frac{|22 + 2x|^3 - |13 - 2x|^3}{\log_4(10 + x) - \log_4(36 - 2x)} > 0.$$

▲ Прежде всего найдем область допустимых значений неизвестной  $x$ :

$$\begin{cases} 10 + x > 0, \\ 36 - 2x > 0, \\ \log_4(10 + x) - \log_4(36 - 2x) \neq 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -10, \\ x < 18, \\ 10 + x \neq 36 - 2x. \end{cases}$$

Таким образом, область допустимых значений состоит из двух интервалов:  
 $-10 < x < 18$ , т.е.  $x \neq 26/3$ ,  $x \in \left(-10; \frac{26}{3}\right) \cup \left(\frac{26}{3}; 18\right)$ .

Перейдем теперь непосредственно к решению неравенства. Очевидно, что нужно рассматривать два случая: числитель и знаменатель положительны, числитель и знаменатель отрицательны.

$$\text{а) } \begin{cases} |22 + 2x|^3 - |13 - 2x|^3 > 0, \\ \log_4(10 + x) - \log_4(36 - 2x) > 0, \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} |22 + 2x|^3 - |13 - 2x|^3 < 0, \\ \log_4(10 + x) - \log_4(36 - 2x) < 0. \end{cases}$$

Займемся сначала системой а). Ее первое неравенство можно переписать следующим образом

$$|22 + 2x|^3 > |13 - 2x|^3.$$

Но это неравенство равносильно другому неравенству

$$|22 + 2x|^2 > |13 - 2x|^2,$$

которое можно переписать так

$$(22 + 2x)^2 - (13 - 2x)^2 = 0.$$

Используя формулы сокращенного умножения для разности двух квадратов, получим

$$(22 + 2x + 13 - 2x)(22 + 2x - 13 + 2x) > 0.$$

Отсюда

$$35 \cdot (9 + 4x) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x > -9/4.$$

Второе неравенство системы а) можно записать так

$$\log_4(10 + x) > \log_4(36 - 2x).$$

Отсюда следует, что

$$10 + x > 36 - 2x \quad \Leftrightarrow \quad x > 26/3.$$

С учетом области допустимых значений система а) имеет решение  $26/3 < x < 18$ .

Чтобы получить решение первого неравенства системы б) нужно проделать те же самые выкладки, что и для системы а), но со знаком «<» вместо «>». Поэтому первое неравенство имеет решение  $x < -9/4$ , а второе -  $-10 < x < 26/3$ . Следовательно, система б) имеет решение

$$-10 < x < -9/4.$$

Ответ.  $\left(-10; -\frac{9}{4}\right) \cup \left(\frac{26}{3}; 18\right)$ . ▼

## Собственно тригонометрические уравнения

В этом пункте мы рассмотрим тригонометрические уравнения, которые можно представить в виде  $F(x) = 0$ , где  $F(x)$  — рациональная функция от тригонометрических функций (синуса, косинуса, тангенса и котангенса) одного и того же или различных аргументов, зависящих от  $x$ , т.е. функция, которая получается из указанных тригонометрических функций и констант с помощью операции сложения, вычитания, умножения, деления и возведения в степень с целым показателем. К простейшим тригонометрическим уравнениям этого вида относятся уравнения:

$$\sin x = a, \quad (1)$$

$$\cos x = a, \quad (2)$$

$$\operatorname{tg} x = a, \quad (3)$$

$$\operatorname{ctg} x = a, \quad (4)$$

Уравнения (1) и (2) разрешимы для любых значений  $a$ , удовлетворяющих условию  $|a| \leq 1$ , и все их решения определяются соответственно по формулам

$$x_n = (-1)^n \arcsin a + n\pi, \quad n \in \mathbb{Z} \quad \text{и}$$

$$x_n = \pm \arccos a + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Уравнения (3) и (4) разрешимы при любых действительных значениях  $a$ , причем для  $a \neq 0$  уравнение (4) равносильно уравнению

$$\operatorname{tg} x = \frac{1}{a}.$$

Любое решение уравнения (3) определяется формулой

$$x_n = \operatorname{arctg} a + n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Приведем два варианта типичной ошибки, часто встречающейся в работах абитуриентов при решении уравнения  $\sin x = a$ :

1. «решение уравнения  $\sin x = \frac{1}{2}(\sqrt{17} - 1)$  имеет вид

$$x_n = (-1)^n \arcsin \frac{\sqrt{17} - 1}{2} + n\pi, \quad n \in \mathbb{Z} \gg.$$

— обычно абитуриенты знают, что уравнение  $\sin x = a$  не имеет решений при  $|a| > 1$ , но допускают приведенную ошибку, забывая оценить число вида  $\frac{1}{2}(\sqrt{17} - 1)$ ;

2. второй вариант аналогичной ошибки идет от «вредной» привычки к формальным записям без учета их смысла: «решение уравнения  $\sin x = \frac{1}{2}(\sqrt{17} - 1)$  имеет вид

$$x_n = (-1)^n \arcsin \frac{\sqrt{17} - 1}{2} + n\pi, \quad n \in \mathbb{Z},$$

но  $\frac{1}{2}(\sqrt{17} - 1) > 1$ , поэтому  $x_n$  не удовлетворяет нашему уравнению» — это неверно, поскольку  $\arcsin \frac{\sqrt{17}-1}{2}$ , а с ним и  $x_n$  просто не существуют.

Методы решения тригонометрических уравнений рассматриваемого класса чрезвычайно разнообразны и состоят в сведении их с помощью соответствующих преобразований к уравнениям вида (1) — (4), совокупностям или системам таких уравнений. При этом процессу указанного сведения присущи все проблемы равносильности уравнений (потеря или появление «лишних» корней), отмеченные выше в разделе 5. Большинство распространенных методов решения тригонометрических уравнений описано в справочной и учебной литературе, список которой приведен в конце практикума. Здесь же мы даем несколько примеров решения таких уравнений, отмечая при этом типичные погрешности, встречающиеся в работах абитуриентов.

Уравнение

$$a \sin \lambda x + b \cos \lambda x = c, \quad (5)$$

где  $a \neq 0$ ,  $b \neq 0$ ,  $\lambda \neq 0$ ,

может быть решено различными методами, например, с помощью подходящей замены переменной или переходом к уравнению с радикалом, что приносит дополнительные трудности анализа равносильности применяемых преобразований.

Стандартный метод решения этого уравнения, называемый методом вспомогательного угла, состоит в следующем. Разделим обе части уравнения (5)

на  $\sqrt{a^2 + b^2}$ ,

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin \lambda x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos \lambda x = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Так как числа  $A = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ ,  $B = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$  удовлетворяют условию  $A^2 + B^2 = 1$ , существует угол  $\varphi$  такой, что  $\cos \varphi = A$ ,  $\sin \varphi = B$ . (Заметим, что таких углов существует на самом деле бесконечное множество, но нам нужен один).  
Теперь

$$\cos \varphi \cdot \sin \lambda x + \sin \varphi \cdot \cos \lambda x = \sin(\lambda x + \varphi) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Если  $|c| \leq \sqrt{a^2 + b^2}$ , то последнее, а с ним и исходное уравнение разрешимы, а их решение имеет вид

$$x_n = \frac{1}{\lambda} \left[ (-1)^n \arcsin \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} - \varphi + n\pi \right], \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Если  $|c| > \sqrt{a^2 + b^2}$ , уравнение (5) решений не имеет.

### Пример 1.

Пусть в уравнении (5)  $\lambda = 1$ ,  $a = c = 3$ ,  $b = 2$ . Тогда уравнение

$$3 \sin x + 2 \cos x = 3$$

разрешимо, так как  $3 < \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$ . При этом

$$x_n = (-1)^n \arcsin \frac{3}{\sqrt{13}} - \arccos \frac{3}{\sqrt{13}} + n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Если в уравнении (5)  $\lambda$ ,  $a$ ,  $b$  прежние, а  $c = 4$ , тогда это уравнение решений не имеет, так как  $4 > \sqrt{13}$ . ▼

Распространенная группа ошибок при решении тригонометрических уравнений связана с невнимательным отношением к ОДЗ уравнения. Если в записи уравнения присутствуют функции тангенса, котангенса или осуществляется операция деления на функции, обладающие нулями, то ОДЗ такого уравнения уже не совпадает с  $R$ , а выделяется на этом множестве условиями типа  $x \neq \frac{(2k+1)\pi}{2}$  и т.д. Переход к уравнениям в синусах и косинусах в этом случае часто проводится путем умножения обеих частей исходного уравнения на некоторые тригонометрические функции, что обычно приводит к появлению «лишних» корней, а возникающие при этом ошибки являются следствием либо игнорирования ОДЗ уравнения, либо неумения правильно провести отбраковку «лишних» корней.

## Пример 2. Решить уравнение

$$\operatorname{tg} 3x + \operatorname{tg} x = 4 \sin 4x. \quad (6)$$

▲ ОДЗ уравнения определяется условиями

$$3x \neq \frac{(2n+1)\pi}{2}, \quad x \neq \frac{(2n+1)\pi}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Второе условие является следствием первого, поэтому

$$x \in \text{ОДЗ} \Leftrightarrow x \neq \frac{(2n+1)\pi}{6}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Представим уравнение (6) в виде

$$\frac{\sin 3x}{\cos 3x} + \frac{\sin x}{\cos x} - 4 \sin 4x = 0$$

и умножив обе его части на произведение  $\cos 3x \cdot \cos x$ , получаем, что

$$\sin 3x \cdot \cos x + \cos 3x \cdot \sin x - 4 \sin 4x \cdot \cos 3x \cos x = 0.$$

Применение формулы синуса суммы двух углов приводит к уравнению

$$\sin 4x - 4 \sin 4x \cdot \cos 3x \cdot \cos x = 0$$

или

$$\sin 4x \cdot (1 - 4 \cdot \cos 3x \cdot \cos x) = 0,$$

которое распадается на два уравнения

$$\sin 4x = 0 \quad (7)$$

и

$$1 - 4 \cdot \cos 3x \cdot \cos x = 0. \quad (8)$$

Решения уравнения (7) имеют вид  $x_k = \frac{k\pi}{4}$ ,  $k \in Z$ . Но решениями уравнения (6) являются лишь те из них, которые лежат в его ОДЗ, т.е. удовлетворяют условию  $x_k \neq \frac{(2n+1)\pi}{6}$ , где  $n \in Z$ . Отбракуем «лишние» корни.

Пусть  $\frac{k\pi}{4} \neq \frac{(2n+1)\pi}{6}$ , где  $k, n \in Z$ . Тогда  $3k \neq 4n + 2$ . Число  $4n + 2$  в том и только в том случае делится нацело на 3, когда  $n = 3m + 1$ ,  $m \in Z$ . Поэтому «лишние» корни определяются условием  $3k = 12m + 6$  или  $k = 4m + 2$ ,  $m \in Z$ . Таким образом, решения уравнения (7), принадлежащие ОДЗ уравнения (6), имеют вид

$$x_k = \frac{k\pi}{4}, \quad k \in Z, \quad k \neq 4m + 2, \quad m \in Z.$$

Воспользовавшись формулой

$$\cos 3x = \cos^3 x - 3\sin^2 x \cdot \cos x,$$

приведем уравнение (8) к виду

$$4\cos^4 x - 12\sin^2 x \cdot \cos^2 x = 1.$$

После этого осуществим стандартный переход к квадратному уравнению относительно  $\cos 2x$

$$4 \cos^2 2x + 2 \cos 2x - 3 = 0.$$

После замены  $\cos 2x = t$  получаем, что уравнение

$$4t^2 + 2t - 3 = 0$$

имеет корни  $t_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{4}$ . Уравнение  $\cos 2x = \frac{-1 - \sqrt{13}}{4}$  решений не имеет, так как  $\left| \frac{-1 - \sqrt{13}}{4} \right| > 1$ , а уравнение

$$\cos 2x = \frac{\sqrt{13} - 1}{4}$$

имеет решения

$$x_k = \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{\sqrt{13} - 1}{4} + k\pi, \quad k \in Z.$$

Покажем, что все они лежат в ОДЗ уравнения (6). Действительно, если это не так, т.е.

$$\pm \frac{1}{2} \arccos \frac{\sqrt{13} - 1}{4} + k\pi = \frac{(2n + 1)\pi}{6}$$

для некоторых  $k$  и  $n$  из  $Z$ , тогда

$$\arccos \frac{\sqrt{13} - 1}{4} = \pm \frac{(2n - 6k + 1)\pi}{3}.$$

Взяв косинус от обеих частей этого равенства, получаем, что

$$\frac{\sqrt{13}-1}{4} = \cos \frac{(2n-4k+1)\pi}{3}.$$

Но последнее равенство невозможно ни при каких  $k$  и  $n$  из  $Z$ , так как его правая часть принимает только значения  $1/2, -1$ .

Ответ:

$$\begin{aligned} x_n &= \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{\sqrt{13}-1}{4} + n\pi, \quad n \in Z, \\ x_k &= \frac{k\pi}{4}, \quad k \in Z, \quad k \neq 4m+2, \quad m \in Z. \end{aligned}$$

При решении тригонометрических уравнений, впрочем, как и вообще при решении уравнений следует иметь в виду, что отказ от стандартных преобразований может избавить от громоздких и утомительных выкладок и привести к простому и короткому решению задачи, что всегда приветствуется и поощряется на конкурсных экзаменах. Приведем пример нестандартного решения тригонометрического уравнения.

**Пример 3.** Решить уравнение

$$\sin^2 \frac{2x}{3} + 2 \sin 2x \cdot \sin \frac{2x}{3} + 5 \cos^2 x = 0.$$

▲ Это уравнение можно рассматривать как квадратное относительно  $\sin \frac{2x}{3}$ . Следовательно, если  $x$  - корень этого уравнения, тогда

$$\sin \frac{2x}{3} = -\sin 2x \pm \sqrt{\sin^2 2x - 5 \cos^2 x}.$$

Последнее равенство возможно лишь в том случае, когда  $\cos^2 x \cdot (4 \sin^2 x - 5) \geq 0$ , т.е. лишь при выполнении условия  $\cos x = 0$ .

Если  $\cos x = 0$ , тогда  $\sin 2x = 0$ , и поэтому исходное уравнение принимает вид  $\sin^2 \frac{2x}{3} = 0$ . Таким образом, рассматриваемое уравнение равносильно системе двух простейших уравнений

$$\begin{cases} \cos x = 0; \\ \sin \frac{2x}{3} = 0, \end{cases}$$

решение которой есть пересечение множеств

$$\left\{ x_k = \frac{(2k+1)\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\} \quad \text{и} \quad \left\{ x_n = \frac{3\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z} \right\},$$

$$\text{т.е.} \quad \left\{ x_m = \frac{3(2m+1)\pi}{2}, m \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Ответ:  $x_m = \frac{3(2m+1)\pi}{2}, m \in \mathbb{Z}$ . ▼

**Пример 4.** Решить уравнение

$$\left( \cos \frac{3x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right) - \cos \frac{2\pi + x}{2} \cdot \sin^2 x = 0.$$

▲ Преобразуем сумму в скобках в произведение, воспользуемся формулой приведения  $\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$ :

$$2 \cdot 2 \cos \frac{\frac{3x}{2} + \frac{x}{2}}{2} \cdot \cos \frac{\frac{3x}{2} - \frac{x}{2}}{2} + \cos \frac{x}{2} \cdot \sin^2 x = 0,$$

$$4 \cos x \cdot \cos \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} \cdot \sin^2 x = 0.$$

Вынесем общий множитель  $\cos \frac{x}{2}$  за скобки:

$$\cos \frac{x}{2} (4 \cos x + \sin^2 x) = 0.$$

Приравняем к нулю каждый из множителей:

$$1) \cos \frac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \pi + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$2) 4 \cos x + 1 - \cos^2 x = 0; \quad \cos^2 x - 4 \cos x = 0.$$

Обозначим  $\cos x = t$ . Решим квадратное уравнение

$$t^2 - 4t - 1 = 0, \quad t_{1,2} = 2 \pm \sqrt{5}$$

Для  $t_1 = 2 + \sqrt{5}$  уравнение  $\cos x = 2 + \sqrt{5}$  решений не имеет, т.к.  
 $2 + \sqrt{5} > 1$ .

Для  $t_2 = 2 - \sqrt{5}$  уравнение

$$\cos x = 2 - \sqrt{5}, \quad x = \pm \arccos(2 - \sqrt{5}) + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z} \text{ или}$$

$$x = \pm(\pi - \arccos(\sqrt{5} - 2)) + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: 
$$\begin{cases} x = \pi + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z} \\ x = \pm(\pi - \arccos(\sqrt{5} - 2)) + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$
 ▼

**Пример 5.** Решить уравнение

$$\sqrt{3}(\cos x + \sin x) - \cos 2x - \sin 2x = 1.$$

▲ Воспользуемся формулами синуса и косинуса двойного аргумента

$$\sqrt{3}(\cos x + \sin x) - (\cos^2 x - \sin^2 x) - 2 \sin x \cos x - \sin^2 x - \cos^2 x = 0,$$

$$\sqrt{3}(\cos x + \sin x) - (\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x) - (\sin x + \cos x)^2 = 0.$$

Разложим левую часть уравнения на множители:

$$(\cos x + \sin x)(\sqrt{3} - \cos x + \sin x - \sin x - \cos x) = 0,$$

$$(\cos x + \sin x)(\sqrt{3} - 2 \cos x) = 0.$$

Это уравнение равносильно совокупности двух уравнений:

$$1) \cos x + \sin x = 0, \quad \operatorname{tg} x = -1, \quad x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$2) \sqrt{3} - 2 \cos x = 0, \quad \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad x = \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ:  $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$ ;  $x = \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi k$ ;  $n, k \in \mathbb{Z}$ . ▼

**Пример 6.** Решить уравнение

$$(\sqrt{3} \sin x + \cos x)^2 = 5 + \cos\left(\frac{\pi}{3} - 4x\right).$$

▲ Преобразуем выражение в левой части уравнения:

$$\sqrt{3} \sin x + \cos x = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sin x + \frac{1}{2} \cos x\right) = 2 \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$$

Теперь уравнение примет вид

$$4 \cos^2\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 5 + \cos\left(\frac{\pi}{3} - 4x\right).$$

Воспользуемся слева и справа формулой  $2 \cos^2 \alpha = 1 + \cos 2\alpha$

$$2 + 2 \cos\left(2x - \frac{2\pi}{3}\right) = 4 + 2 \cos^2\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right)$$

Используя формулу приведения  $\cos \alpha = -\cos(\pi + \alpha)$  в левой части уравнения и формулу  $\cos \alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$  в правой части, получим

$$-2 \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = 2 + 2 \sin^2\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$$

Воспользовавшись основным тригонометрическим тождеством, сведём уравнение к квадратному относительно  $\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$

$$2 \cos^2\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) - 2 \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) - 4 = 0.$$

Это уравнение равносильно совокупности двух простейших тригонометрических уравнений

$$\begin{cases} \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = 2, \\ \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = -1. \end{cases}$$

Первое из этих уравнений не имеет решений, а решения второго имеют вид

$$2x + \frac{\pi}{3} = \pi + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad \text{или} \quad x = \frac{\pi}{3} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ.  $x = \frac{\pi}{3} + \pi k; \quad k \in \mathbb{Z}$ . ▼

**Пример 7. Решить уравнение**

$$(\sin x + \cos x)^2 = 2 \cos \left( \frac{\pi}{4} - x \right) \cdot \cos \left( \frac{\pi}{4} + x \right).$$

▲ Преобразуя правую часть уравнения по формулам косинуса разности и косинуса суммы, будем иметь:

$$(\sin x + \cos x)^2 = 2 \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x \right) \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x \right),$$

$$(\sin x + \cos x)^2 = \cos^2 x - \sin^2 x,$$

$$(\sin x + \cos x)(\sin x + \cos x - \cos x + \sin x) = 0.$$

Последнее уравнение равносильно совокупности уравнений:

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x = -1 \\ \sin x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, \quad k \in Z \\ x = \pi n, \quad n \in Z \end{cases}$$

Ответ:  $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, \quad k \in Z, \quad x = \pi n, \quad n \in Z$  ▼

### Пример 8. Решить уравнение

$$\sqrt{3} \cdot \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 2 \cdot \sin^2\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{8}\right).$$

▲ Применяя формулу понижения степени, будем иметь:

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{3} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1,$$

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{3} \sin\left(\frac{\pi}{2} - \left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right) = 1,$$

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \sqrt{3} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1,$$

Последнее уравнение может быть решено методом вспомогательного аргумента. В результате получим:

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}, \quad x - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Ответ:  $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad x = -\frac{5\pi}{12} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$ . ▼

## Системы тригонометрических уравнений

Наиболее распространенные методы решения простейших тригонометрических систем изложены в пособиях [1] и [3]. К этим пособиям мы и отправляем читателя. Здесь же обратим внимание на одну типичную ошибку, встречающуюся в работах абитуриентов.

**Пример 9.** Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sin(x - y) = 0, \\ \sin(x + y) = 1. \end{cases}$$

▲ Выписывая общие решения каждого из простейших тригонометрических уравнений, входящих в систему, получаем, что

$$\begin{cases} x - y = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}, \\ x + y = \frac{(4k+1)\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$

откуда следует, что  $x = \frac{(6k+1)\pi}{4}$ ,  $y = \frac{(2k+1)\pi}{4}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

Однако, нетрудно заметить, что нами потерян ряд решений, например,  $x = \frac{3\pi}{4}$ ,  $y = \frac{\pi}{4}$ . В чем же дело?

Дело в том, что при выписывании общих решений уравнений исходной системы допущена ошибка, состоящая в отождествлении параметра  $k$  в первом и во втором уравнениях.

На самом деле необходимо ввести независимые целые параметры  $k$  и  $n$ .  
Правильное решение поэтому будет иметь вид

$$\begin{cases} x - y = k\pi, & k \in Z, \\ x + y = \frac{(4n+1)\pi}{2}, & n \in Z, \end{cases}$$

откуда следует, что

$$x = \frac{(4n+1)\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, \quad y = \frac{(4n+1)\pi}{4} - \frac{k\pi}{2}, \quad k, n \in Z.$$

Ответ:  $\left\{ \left( \frac{(4n+1)\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, \frac{(4n+1)\pi}{4} - \frac{k\pi}{2} \right) \right\}.$  ▼

**Пример 10.** Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sin \frac{2x}{3} + \sqrt{2} \cos \frac{x}{3} + \sqrt{3}(\cos \frac{2x}{3} + \sqrt{2} \sin \frac{x}{3}) = 0, \\ \sin x \operatorname{tg} x = 3 \cos x - 2 \sin x. \end{cases}$$

▲ Рассмотрим каждое уравнение системы по отдельности. Слагаемые

первого уравнения перегруппируем несколько иначе:

$$\sin \frac{2x}{3} + \sqrt{3} \cos \frac{2x}{3} + \sqrt{2} \left( \cos \frac{x}{3} + \sqrt{3} \sin \frac{x}{3} \right) = 0.$$

Разделим уравнение на 2, тогда

$$\frac{1}{2} \sin \frac{2x}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \frac{2x}{3} + \sqrt{2} \left( \frac{1}{2} \cos \frac{x}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \frac{x}{3} \right) = 0,$$

или

$$\cos \frac{\pi}{3} \sin \frac{2x}{3} + \sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{2x}{3} + \sqrt{2} \left( \sin \frac{\pi}{6} \cos \frac{x}{3} + \cos \frac{\pi}{6} \sin \frac{x}{3} \right) = 0.$$

Тогда, используя формулу для синуса суммы, получим

$$\sin \left( \frac{2x}{3} + \frac{\pi}{3} \right) + \sqrt{2} \sin \left( \frac{x}{3} + \frac{\pi}{6} \right) = 0.$$

По формуле для синуса двойного аргумента

$$2 \sin \left( \frac{x}{3} + \frac{\pi}{6} \right) \cos \left( \frac{x}{3} + \frac{\pi}{6} \right) + \sqrt{2} \sin \left( \frac{x}{3} + \frac{\pi}{6} \right) = 0$$

или

$$2 \sin \left( \frac{x}{3} + \frac{\pi}{6} \right) \cdot \left( 2 \cos \left( \frac{x}{3} + \frac{\pi}{6} \right) + \sqrt{2} \right) = 0.$$

Для первого сомножителя

$$\sin \left( \frac{x}{3} + \frac{\pi}{6} \right) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{3} + \frac{\pi}{6} = \pi n, \quad n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = 3\pi n - \frac{\pi}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Для второго сомножителя

$$2 \cos \left( \frac{x}{3} + \frac{\pi}{6} \right) + \sqrt{2} = 0$$

или

$$\cos \left( \frac{x}{3} + \frac{\pi}{6} \right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Решение этого уравнения легко найти по известной формуле

$$\frac{x}{3} + \frac{\pi}{6} = \pm \arccos \left( -\frac{\sqrt{2}}{2} \right) + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Так как

$$\arccos \left( -\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \pi - \arccos \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \pi - \frac{\pi}{4},$$

то

$$\frac{x}{3} = -\frac{\pi}{6} \pm \frac{3\pi}{4} + 2\pi m, \quad m \in \mathbb{Z}$$

и

$$x = 6\pi m - \frac{\pi}{2} \pm \frac{9\pi}{4}, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

Следовательно, все решения первого уравнения описываются следующей совокупностью

$$\begin{cases} x = 3\pi n - \frac{\pi}{2}, & n \in \mathbb{Z}, \\ x = 6\pi m - \frac{\pi}{2} \pm \frac{9\pi}{4}, & m \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Перейдем ко второму уравнению. Заметим сначала, что в его области допустимых значений  $\cos x \neq 0$ . Значит, уравнение можно разделить на  $\cos x$ :

$$\frac{\sin x \operatorname{tg} x}{\cos x} = \frac{3 \cos x - 2 \sin x}{\cos x}.$$

Тогда

$$\operatorname{tg}^2 x = 3 - 2 \operatorname{tg} x \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{tg}^2 x + 2 \operatorname{tg} x - 3 = 0.$$

Последнее уравнение относительно  $t = \operatorname{tg} x$  является квадратным и имеет корни  $t_1 = -3$ ,  $t_2 = 1$ . Тогда для первого корня получаем уравнение  $\operatorname{tg} x = -3$ , все решения которого можно записать в виде

$$x = -\operatorname{arctg} 3 + \pi p, \quad p \in \mathbb{Z}.$$

Для корня  $t_2 = 1$  соответствующее уравнение принимает вид  $\operatorname{tg} x = 1$ , все решения которого находятся без труда

$$x = \frac{\pi}{4} + \pi q, \quad q \in \mathbb{Z}.$$

После того, как решены оба уравнения, нужно отобрать общие корни уравнений системы. Это проще сделать с использованием числовой окружности. Отметим на ней первую серию решений

$$x = 3\pi n - \frac{\pi}{2}, \quad n \in Z,$$

первого уравнения. Если  $n = 0$ , то получим  $x = -\pi/2$ . Отметим эту точку на числовой окружности знаком  $\bullet$ . При четном  $n$  значения  $x$  будут отличаться от  $-\pi/2$  на число, кратное  $2\pi$ . Поэтому на числовой окружности все эти значения  $x$  совпадают. Если  $n = 1$ , то  $x = 3\pi - \pi/2 = 2\pi + \pi/2$ . Эта точка на числовой окружности отмечена знаком  $\star$ . При нечетных  $n$  значения  $x$  будут отличаться от  $\pi/2$  на число, кратное  $2\pi$ , и новых точек не будет. Вторую серию решений

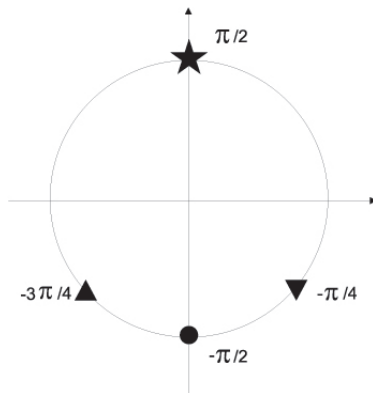
$$x = 6\pi m - \frac{\pi}{2} \pm \frac{9\pi}{4}, \quad m \in Z,$$

можно разбить на две серии решений

$$x = 6\pi m - \frac{\pi}{2} + \frac{9\pi}{4} = 6\pi m + \frac{7\pi}{4},$$

$$x = 6\pi m - \frac{\pi}{2} - \frac{9\pi}{4} = 6\pi m - \frac{11\pi}{4}, \quad m \in Z.$$

При  $m = 0$  для первой серии  $x = \frac{7\pi}{4} = 2\pi - \frac{\pi}{4}$ , для второй серии  $x = -\frac{11\pi}{4} = -2\pi - \pi + \frac{\pi}{4}$ . Поставим эти точки на числовой окружности, отметив знаком  $\blacktriangledown$  первую из них, а знаком  $\blacktriangle$  – вторую. При остальных  $m$  получаются значения  $x$ , отличающиеся от одного из уже найденных на число, кратное  $2\pi$ . Поэтому больше точек нет.



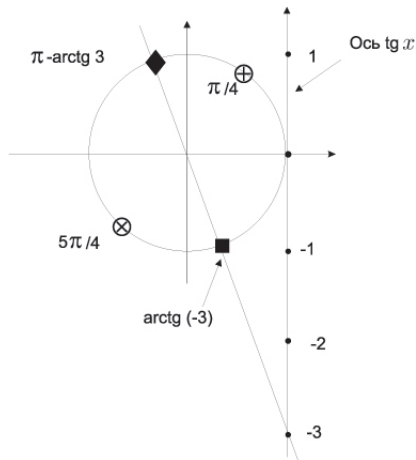
## Первая серия решений

$$x = -\operatorname{arctg} 3 + \pi p, \quad p \in Z,$$

второго уравнения системы достаточно точно может быть построена на числовой окружности следующим образом. Пусть  $p = 0$ . Тогда  $x = \operatorname{arctg}(-3)$ . На "оси тангенса" возьмем точку  $-3$ . Через нее и центр окружности проведем прямую, которая пересечется с окружностью в двух точках. Точка  $\operatorname{arctg}(-3)$  помечена знаком  $\blacksquare$ . В эту же точку попадут все значения  $x$  при четных  $p$ . Если  $p$  нечетно, то получим точку, помеченную знаком  $\blacklozenge$ . Вторая серия решений

$$x = \frac{\pi}{4} + \pi q, \quad q \in Z,$$

второго уравнения системы дает две точки на числовой окружности, помеченные знаками  $\oplus$  и  $\otimes$  соответственно для четных и нечетных  $q$ .



Сравнивая построенные точки, легко увидеть, что общие точки есть лишь в третьей четверти. Поэтому все решения системы уравнений задаются равенством

$$x = 6\pi m - \frac{11\pi}{4}, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

## Тригонометрические уравнения смешанного типа

К этому классу мы относим уравнения, в которых наряду с элементарными тригонометрическими функциями присутствуют радикалы, логарифмы, экспоненты, модули и т.д., что обычно усложняет описание ОДЗ уравнения и привносит дополнительные трудности, связанные с необходимостью комбинированного использования методов решения тригонометрических, иррациональных, логарифмических, показательных и других уравнений. В напутствие читателю вновь напомним, что уравнения, встречающиеся в практике конкурсных экзаменов, часто содержат некоторую «изюминку», позволяющую наряду со стандартными методами решения, требующими утомительной технической работы, применить оригинальный ход, кратчайшим путем приводящий к успеху. Это напоминание проиллюстрируем примером.

**Пример 11.** Решить уравнение

$$|\sin x| + |\cos x| = 1/\sqrt{2}.$$

▲ Первый способ решения. Стандартный метод решения этого уравнения предписывает освобождение от модулей, в результате чего уравнение сводится к равносильной ему совокупности четырех систем:

$$\begin{aligned} \text{а)} \begin{cases} \sin x \geq 0, \cos x \geq 0, \\ \sin x + \cos x = 1/\sqrt{2}, \end{cases} & \quad \text{б)} \begin{cases} \sin x \geq 0, \cos x < 0, \\ \sin x - \cos x = 1/\sqrt{2}, \end{cases} \\ \text{в)} \begin{cases} \sin x < 0, \cos x \geq 0, \\ -\sin x + \cos x = 1/\sqrt{2}, \end{cases} & \quad \text{г)} \begin{cases} \sin x < 0, \cos x < 0, \\ -\sin x - \cos x = 1/\sqrt{2}, \end{cases} \end{aligned}$$

Решим, например, систему а).

Метод вспомогательного угла приводит уравнение

$$\sin x + \cos x = 1/\sqrt{2}$$

к виду

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}.$$

Выпишем две серии решений этого уравнения

$$x = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} + 2k\pi = \frac{7\pi}{12} + 2k\pi \text{ и } x = -\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} + 2k\pi = -\frac{\pi}{12} + 2k\pi.$$

Так как все значения первой серии лежат во второй четверти тригонометрического круга, а все значения второй серии — в его четвертой четверти, то система а) решений не имеет.

Аналогичными рассуждениями можно показать (советуем читателю это проделать самостоятельно), что системы б)-г) также несовместны, т.е. рассматриваемое уравнение решений не имеет.

Второй способ решения.

Заметим, что обе части уравнения положительны, возведем их в квадрат.

В результате чего получим уравнение

$$|\sin x|^2 + 2|\sin x| \cdot |\cos x| + |\cos x|^2 = \frac{1}{2},$$

равносильное исходному. Так как

$$|a|^2 = a^2, \quad |a| \cdot |b| = |a \cdot b|,$$

то последнее уравнение принимает вид

$$1 + |\sin 2x| = \frac{1}{2} \quad \text{или} \quad |\sin 2x| = -\frac{1}{2},$$

откуда следует, что оно не имеет решений. Следовательно, исходное уравнение также не имеет решений. ▼

**Пример 12.** Решить уравнение

$$\sqrt{3} \sin x - \cos x = \sqrt{2 \sin \left( 2x - \frac{\pi}{3} \right)}.$$

▲ Преобразуем левую часть уравнения при помощи метода вспомогательного аргумента:

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \sin x - \frac{1}{2} \cos x = \frac{1}{2} \sqrt{2 \sin \left( 2x - \frac{\pi}{3} \right)},$$

$$\cos \frac{\pi}{6} \sin x - \sin \frac{\pi}{6} \cos x = \frac{1}{2} \sqrt{2 \sin \left( 2x - \frac{\pi}{3} \right)},$$

$$\sin \left( x - \frac{\pi}{6} \right) = \frac{1}{2} \sqrt{2 \sin \left( 2x - \frac{\pi}{3} \right)}.$$

Полученное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} \sin(2x - \frac{\pi}{3}) \geq 0, \\ \sin(x - \frac{\pi}{6}) \geq 0, \\ \sin^2(x - \frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2} \sin(2x - \frac{\pi}{3}) \end{cases}$$

Решим сначала последнее уравнение этой системы. Применяя формулу синуса двойного аргумента, получим:

$$\sin^2 \left( x - \frac{\pi}{6} \right) = \sin \left( x - \frac{\pi}{6} \right) \cdot \cos \left( x - \frac{\pi}{6} \right)$$

Это уравнение равносильно совокупности двух уравнений:

$$\begin{cases} \sin(x - \frac{\pi}{6}) = 0, \\ \sin(x - \frac{\pi}{6}) = \cos(x - \frac{\pi}{6}), \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin(x - \frac{\pi}{6}) = 0, \\ \operatorname{tg}(x - \frac{\pi}{6}) = 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + \pi m, \quad m \in \mathbb{Z}, \\ x = \frac{5\pi}{12} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Теперь, проверяя справедливость тригонометрических неравенств, входящих в систему, делаем вывод, что первая серия решений удовлетворяет обоим неравенствам, а вторая серия решений удовлетворяет второму из этих неравенств только при четных  $n$  ( $n = 2k$ ).

Ответ:  $x = \frac{\pi}{6} + \pi m, \quad m \in \mathbb{Z}; \quad x = \frac{5\pi}{12} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$  ▼

**Пример 13.** Найти все решения уравнения  $\sqrt{2} \cos(|x| - \frac{\pi}{4}) + 1 = 2 \sin 2|x|$ , принадлежащие отрезку  $[-4\pi; \pi]$ .

▲ Делая в уравнении замену переменной  $t = |x|$ ,  $t \geq 0$ , и используя равенство

$$\sin 2t = \cos 2\left(t - \frac{\pi}{4}\right),$$

получим

$$\sqrt{2} \cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right) + 1 = 2 \cos 2\left(t - \frac{\pi}{4}\right),$$

Затем, применяя формулу косинуса двойного аргумента, будем иметь

$$\sqrt{2} \cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right) + 1 = 4 \cos^2\left(t - \frac{\pi}{4}\right) - 2,$$

$$4 \cos^2\left(t - \frac{\pi}{4}\right) - \sqrt{2} \cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right) - 3 = 0,$$

Решая квадратное уравнение относительно  $\cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right)$ , приходим к совокупности двух уравнений:

$$\begin{cases} \cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{3\sqrt{2}}{4} \\ \cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Первое уравнение решений не имеет, так как  $\frac{3\sqrt{2}}{4} > 1$ , а решения второго уравнения имеют вид:

$$t - \frac{\pi}{4} = \pm \frac{3\pi}{4} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

или с учетом  $t \geq 0$ :

$$\begin{cases} t = \pi + 2\pi n, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \\ t = -\frac{\pi}{2} + 2\pi m, \quad m = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

Возвращаясь к переменной  $x$  найдем

$$\begin{cases} |x| = \pi + 2\pi n, & n = 0, 1, 2, 3, \dots \\ |x| = -\frac{\pi}{2} + 2\pi m, & m = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

Выбирая из решений данного уравнения только те решения, которые принадлежат промежутку  $[-4\pi; \pi]$ , будем иметь:

$$x = \pi; -\pi; -3\pi; -\frac{3\pi}{2}; -\frac{7\pi}{2}.$$

Ответ:  $x = \pi; -\pi; -3\pi; -\frac{3\pi}{2}; -\frac{7\pi}{2}$ . ▼

**Пример 14.** Решить уравнение

$$\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - \sin x + 1\right) \sqrt{\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)} = 0.$$

▲ ОДЗ  $\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \geq 0$ .

Данное уравнение сводится к совокупности двух уравнений:

$$\begin{cases} \sin x - \cos x = 1 \\ \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 0 \end{cases}$$

Решения второго уравнения находятся по формуле:  $x = -\frac{\pi}{6} + \pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Для решения первого уравнения применим метод вспомогательного аргумента. Умножая обе части этого уравнения на  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  и вводя вспомогательный аргумент, получим:

$$\sin x \cos \frac{\pi}{4} - \cos x \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

Отсюда найдем две серии решений:

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z} \quad \text{и} \quad x = \pi(2n + 1), \quad n \in \mathbb{Z}$$

Заметим, что вторая серия решений не принадлежит ОДЗ. Объединяя полученные решения с решениями второго уравнения, получим ответ.

Ответ:  $x = -\frac{\pi}{6} + \pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . ▼

# Планиметрия

## Треугольник

Введем обозначения (рис. 42):

$a, b, c$  — длины сторон,

$\alpha, \beta, \gamma$  — величины внутренних углов,

$h_a, h_b, h_c$  — длины высот, опущенных на соответствующие стороны,

$m_a, m_b, m_c$  — длины медиан,

$S$  — площадь треугольника,

$p$  — полупериметр,

$r$  — радиус вписанной окружности,

$R$  — радиус описанной окружности,

$AD$  — биссектриса угла  $A$ .

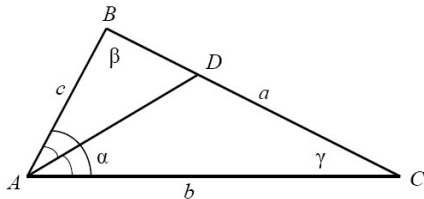


Рис. 42

$$(1) S = \frac{ah_a}{2} = \frac{bh_b}{2} = \frac{ch_c}{2}.$$

$$(2) S = \frac{1}{2}ab \sin \gamma = \frac{1}{2}ac \sin \beta = \frac{1}{2}bc \sin \alpha.$$

$$(3) S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad (\text{формула Герона}).$$

$$(4) S = \frac{abc}{4R}.$$

$$(5) S = r \cdot p.$$

$$(6) \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R \quad \text{теорема синусов.}$$

$$(7) a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha \quad (\text{теорема косинусов}).$$

$$(8) m_a^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}, \quad m_b^2 = \frac{2a^2 + 2c^2 - b^2}{4}, \quad m_c^2 = \frac{2a^2 + 2b^2 - c^2}{4}.$$

$$(9) \frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|BD|}{|DC|} \quad (\text{биссектриса угла треугольника делит противоположную сторону на отрезки, длины которых пропорциональны длинам прилежащих сторон}).$$

**Пример 1.** Длины сторон треугольника равны  $a, b, c$ , причем  $a^2 + b^2 = 5c^2$ . Докажите, что медианы, проведенные к сторонам длин  $a$  и  $b$ , перпендикулярны.

▲ Достаточно доказать, что

$$|AB|^2 = |OA|^2 + |OB|^2.$$

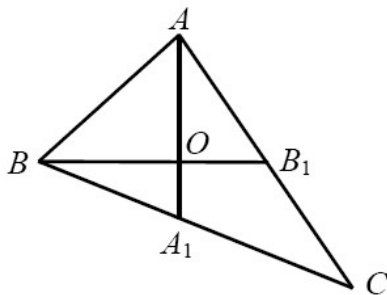


Рис. 43

Так как  $O$  — точка пересечения медиан, то

$$|OA| = \frac{2}{3}|AA_1|, \quad |OB| = \frac{2}{3}|BB_1|$$

или (в силу (8))

$$|OA|^2 = \frac{4}{9} \cdot \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}, \quad |OB|^2 = \frac{4}{9} \cdot \frac{2a^2 + 2c^2 - b^2}{4}.$$

Сложим два последних равенства

$$|OA|^2 + |OB|^2 = \frac{1}{9}a^2 + \frac{1}{9}b^2 + \frac{4}{9}c^2 = \frac{1}{9}(a^2 + b^2) + \frac{4}{9}c^2.$$

Учитывая условие  $a^2 + b^2 = 5c^2$ , получим:

$$|OA|^2 + |OB|^2 = c^2.$$



**Пример 2.** Величина угла при основании равнобедренного треугольника равна  $\alpha$ . Найти отношение длин радиусов вписанной и описанной окружностей.

▲ Используя формулы (4) и (5), можно записать:

$$\frac{r}{R} = \frac{S \cdot 4S}{p \cdot abc}.$$

Пусть  $a = b$ . Для  $S$  воспользуемся формулой (2):

$$\frac{r}{R} = \frac{4 \left( \frac{1}{2} ac \cdot \sin \alpha \right)^2}{\frac{1}{2} (2a + c) \cdot a^2 c} = \frac{4 \sin^2 \alpha}{2 \left( 2 \frac{a}{c} + 1 \right)} = \frac{4 \sin^2 \alpha}{2 \left( \frac{1}{\cos \alpha} + 1 \right)} = \frac{2 \cos \alpha \cdot \sin^2 \alpha}{1 + \cos \alpha}.$$

Итак, получаем  $\frac{r}{R} = \frac{2 \cos \alpha \cdot \sin^2 \alpha}{1 + \cos \alpha}$ . ▼

## Прямоугольный треугольник

Обозначим  $|DB| = a_c$ ,  $|AD| = b_c$ .

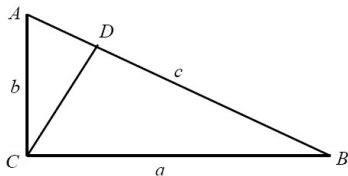


Рис. 44

$$(10) \quad h_c^2 = a_c \cdot b_c, \quad a^2 = a_c \cdot c, \quad b^2 = b_c \cdot c,$$

$$(11) \quad \frac{1}{h_c^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2},$$

$$(12) \quad r = \frac{1}{2}(a + b - c),$$

$$(13) \quad R = \frac{c}{2}.$$

**Пример 3.** В прямоугольном треугольнике проекция катетов на гипотенузу равны  $p$  и  $q$ . Найти площадь треугольника.

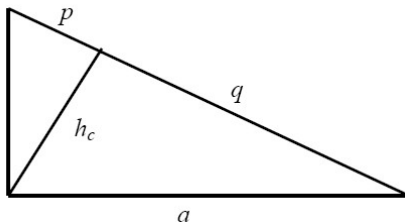


Рис. 45

▲ Из формулы (10) следует  $h_c^2 = p \cdot q$ . По формуле (1)

$$S = \frac{ch_c}{2} = \frac{\sqrt{pq}(p+q)}{2}.$$



## Параллелограмм

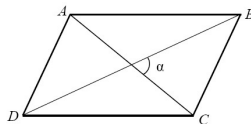


Рис. 46

$$(14) |AB|^2 + |BC|^2 + |CD|^2 + |AD|^2 = |AC|^2 + |BD|^2,$$

$$(15) S = \frac{1}{2} |BD| \cdot |AC| \cdot \sin \alpha,$$

$$(16) S = |AB| \cdot |AD| \cdot \sin \angle BAD.$$

## Вписанные и описанные многоугольники

- (17) Около выпуклого четырехугольника можно описать окружность тогда и только тогда, когда

$$\angle EFK + \angle ELK = \angle FKL + \angle FEL.$$

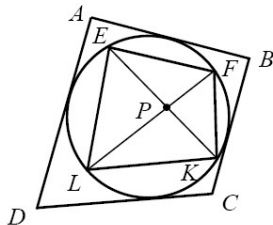


Рис. 47

- (18) В выпуклый четырехугольник можно вписать окружность тогда и только тогда, когда

$$|AB| + |CD| = |BC| + |AD|.$$

- (19) Для любого треугольника  $EFK$ , вписанного в окружность,  

$$\angle EFK = \frac{1}{2} \overset{\frown}{ELK}.$$

- (20) Пусть  $P$  — точка пересечения диагоналей вписанного в окружность четырехугольника  $EFKL$ . Тогда  $\angle KPL = \frac{1}{2} (\overset{\frown}{LK} + \overset{\frown}{EF})$ .

**Пример 4.** В трапецию  $ABCD$ , где  $AB \parallel CD$ , вписана окружность с центром в  $O$ . Найти периметр трапеции, если  $DO = m$ , угол  $DAB$  равен  $\alpha$ , угол  $ABC$  равен  $\beta$ .

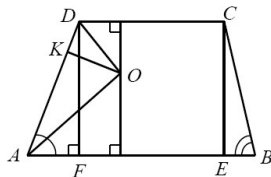


Рис. 48

▲ Из (18) следует (Рис.48)

$$|AD| + |CB| = |CD| + |AB|,$$

поэтому периметр трапеции  $p = 2(|AD| + |CB|)$ . Так как центр  $O$  вписанной окружности равноудален от сторон трапеции, то  $OD$  — биссектриса угла  $ADC$ ,  $AO$  — биссектриса угла  $BAD$ . **Полезное**

**замечание:** если в трапецию вписана окружность, то  $\triangle AOD$  и  $\triangle COB$  прямоугольные.

Из  $\triangle AOD$  находим

$$|AD| = \frac{|DO|}{\sin \frac{\alpha}{2}} \quad \text{или} \quad |AD| = \frac{m}{\sin \frac{\alpha}{2}}.$$

Из  $\triangle ADF$  высота трапеции  $|DF| = |AD| \sin \alpha$  или  $|DF| = 2m \cos \frac{\alpha}{2}$ .

Так как  $|CE| = |DF|$ , то из  $\triangle CEB$  находим

$$|CB| = \frac{|CE|}{\sin \beta} = \frac{2m \cos \frac{\alpha}{2}}{\sin \beta}.$$

Итак,

$$\begin{aligned} p &= 2 \left( \frac{m}{\sin \frac{\alpha}{2}} + \frac{2m \cos \frac{\alpha}{2}}{\sin \beta} \right) = 2 \left( \frac{2m \cos \frac{\alpha}{2}}{\sin \alpha} + \frac{2m \cos \frac{\alpha}{2}}{\sin \beta} \right) = \\ &= \frac{4m \cos \frac{\alpha}{2}}{\sin \alpha \sin \beta} (\sin \beta + \sin \alpha) = \frac{4m \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2} \sin \beta}. \end{aligned}$$



Кроме формального знания перечисленных фактов, полезно уметь решать определенный набор задач. Некоторые из них мы здесь приведем.

### Задача 1.

В треугольнике известны длины двух его сторон  $a$ ,  $b$  и угол  $\gamma$  между ними. Найти остальные элементы треугольника: длину третьей стороны, внутренние углы, длины высот, биссектрис, медиан, радиусы вписанной и описанной окружностей.

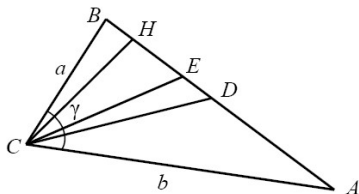


Рис. 49



- 1) По теореме косинусов (рис. 49)

$$c = |AB| = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma}.$$

Зная теперь длины всех трех сторон треугольника, есть смысл установить тип треугольника (прямоугольный, остроугольный, тупоугольный). Например, если  $a^2 > b^2 + c^2$ , то угол против стороны  $a$  — тупой.

- 2) По теореме синусов:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R.$$

$$\sin A = \frac{a \sin \gamma}{c}; \quad \sin B = \frac{b \sin \gamma}{c}; \quad R = \frac{c}{2 \sin \gamma}.$$

- 3)  $|CH| = h_c$ . Из прямоугольного треугольника  $CBH$

$$h_c = a \sin B.$$

Аналогично находим  $h_a$ ,  $h_b$ .

- 4) Из  $\triangle CBE$  длину биссектрисы  $CE$  найдем по теореме синусов:

$$\frac{|CE|}{\sin B} = \frac{a}{\sin(\pi - B - \frac{\gamma}{2})},$$

отсюда

$$|CE| = \frac{a \sin B}{\sin(B + \frac{\gamma}{2})} = \frac{a \sin B}{\sin B \cos \frac{\gamma}{2} + \cos B \sin \frac{\gamma}{2}}.$$

Подставляя сюда найденное в 2) значение  $\sin B$  и  $\cos B = \pm \sqrt{1 - \sin^2 B}$  (знак выбирается с учетом того, является ли угол  $B$  острым или тупым), находим  $|CE|$ . Аналогично находим длины двух других биссектрис.

5) Из треугольника  $CBD$  по теореме косинусов

$$|CD| = m_c = \sqrt{a^2 + \frac{c^2}{4} - a \cdot c \cdot \cos B}.$$

Также можно найти  $m_a$ ,  $m_b$ .

6) Радиус  $r$  вписанной окружности удобно найти, сравнивая две формулы для отыскания площади треугольника:

$$S = \frac{1}{2}ab \sin \gamma \text{ и } S = pr$$

Получим  $r = \frac{ab \sin \gamma}{a + b + c}$ . ▼

В качестве упражнения предлагаем найти все перечисленные в задаче 1 элементы, если треугольник задан: а) стороной  $a$  и двумя прилежащими к ней углами  $\beta$  и  $\gamma$ , б) тремя сторонами.

**Задача 2.** Найти все элементы треугольника, если известны два его внутренних угла  $\alpha$  и  $\beta$  и радиус  $r$  вписанной окружности.

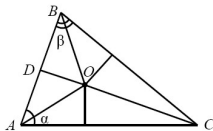


Рис. 50

▲ Учитывая, что центр вписанной окружности — точка пересечения биссектрис, из  $\triangle AOD$  и  $\triangle DBO$  получим (рис. 50)

$$c = |AB| = |DB| + |AD| = r \left( \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} \right).$$

Аналогично

$$a = r \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} + r \operatorname{ctg} \left( \frac{\pi - \alpha - \beta}{2} \right) = r \left( \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} + \operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta}{2} \right),$$

$$b = r \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} + r \operatorname{ctg} \left( \frac{\pi - \alpha - \beta}{2} \right) = r \left( \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta}{2} \right),$$

Остальные элементы треугольника далее можно найти, как в задаче 1. ▼

## Стереометрия

При решении стереометрических задач залогом успеха является грамотно выполненный чертёж. Мы дадим вам ряд практических советов к построению пространственных фигур.

### Совет 1.

При изображении пространственной фигуры на плоскости целесообразно считать, что с плоскостью чертежа совпадает одна из плоскостей, связанных с заданной фигурой (грань, сечение), в которой лежат заданные элементы (углы, многоугольники, отрезки) либо те элементы, которые нужно искать. Тогда эти элементы будут изображаться на чертеже без искажения (с точностью, быть может, до подобия). При этом два взаимно перпендикулярных направления в плоскости чертежа (например, основание и высота треугольника сечения) удобно изображать в виде горизонтального и вертикального отрезка.

### Совет 2.

Если при решении стереометрической задачи используется плоский фрагмент пространственной фигуры, не лежащей в плоскости чертежа, и на этом фрагменте нужно выполнить дополнительные построения, то целесообразно изобразить его отдельно, без искажения (с точностью лишь до подобия).

### Совет 3.

Часто в стереометрической задаче речь идет о сфере, вписанной в многогранник (или, что то же, о многограннике, описанном около сферы). Что это означает и какие выводы при изображении этой комбинации фигур следует сделать?

Сферу называют вписанной в многогранник, если она касается каждой грани многогранника. Вспомним, во-первых, что радиус сферы, проведенной в точку касания, перпендикулярен к касательной плоскости. Поэтому, в частности, сфера не может коснуться ребра многогранника, так как тогда, проведя радиус в точку касания, мы бы имели один общий перпендикуляр из центра сферы на две непараллельные плоскости, в которых лежат грани, пересекающиеся по данному ребру (такую ошибку часто допускают при изображении абитуриенты). Во-вторых следует помнить, что центр сферы равноудален от граней многогранника и поэтому лежит в биссекторных (делящих пополам) плоскостях двугранных углов при ребрах многогранника.

Если через центр шара провести плоскость, перпендикулярную ребру многогранника, то в сечении получится линейный угол, центр шара будет лежать на его биссектрисе, и в этой-то перпендикулярной ребру плоскости будут лежать радиусы, проведенные в точки касания с гранями двугранного угла (рис. 51).

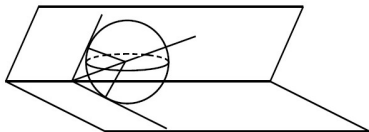


Рис. 51

**Пример 5.** Основанием пирамиды служит равнобедренный треугольник с боковой стороной, имеющей длину  $b$ . Боковые грани пирамиды, проходящие через боковые стороны основания, перпендикулярны основанию и образуют между собой угол  $\alpha$ . Угол между третьей боковой гранью и плоскостью основания равен  $\alpha$ . Найти радиус шара, вписанного в пирамиду.

▲ Очевидно, центр шара, в частности, лежит в биссекторной плоскости двугранного угла при ребре, перпендикулярном к основанию (по этому ребру пересекаются боковые грани, перпендикулярные к основанию). Будем считать, что плоскость чертежа совпадает с этой биссекторной плоскостью (рис. 52).

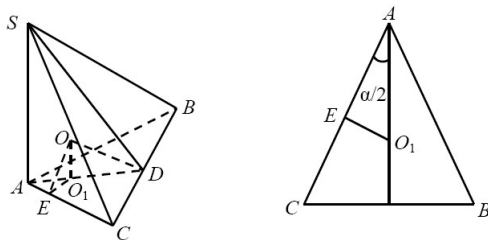


Рис. 52

Так как плоскость  $ABC \perp SA$ , то  $\angle BAC$  — линейный угол двугранного угла при ребре  $SA$ . По условию  $\angle BAC = \alpha$ . Биссекторная плоскость этого двугранного угла проходит через биссектрису  $AD$  угла  $BAC$  (которая является для треугольника  $ABC$  высотой и медианой). Итак,  $SAD$  — биссекторная плоскость, в ней лежит центр шара, точка  $O$ . Угол  $SDA$  — линейный угол двугранного угла при ребре  $BC$  и по условию  $\angle SDA = \alpha$ . Центр шара лежит также на биссектрисе этого угла, поэтому  $\angle ODO_1 = \alpha/2$ . Проведем  $OO_1 \perp AD$ ,  $O_1E \perp AC$ .  $O_1E$  — одна из сторон двугранного угла при ребре  $AC$ . Центр шара лежит на биссектрисе этого линейного угла, поэтому  $\angle OEO_1 = 45^\circ$  (грани  $SAC$  и  $ABC$  по условию перпендикулярны). Следовательно,

$$|OO_1| = |O_1E| = R.$$

Теперь легко найти  $R$ .

$$\text{Из } \triangle OO_1D \quad |O_1D| = R \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}.$$

$$\text{Из } \triangle AEO_1 \quad R = |AO_1| \sin \frac{\alpha}{2}.$$

$$\text{Но } |AO_1| = |AD| - |O_1D| = b \cos \frac{\alpha}{2} - R \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}.$$

Следовательно,

$$R = \left( b \cos \frac{\alpha}{2} - R \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \right) \cdot \sin \frac{\alpha}{2}, \text{ или } R = \frac{b \sin \alpha}{4 \cos^2 \frac{\alpha}{2}}.$$

#### Совет 4.

Если пространственная фигура есть комбинация круглых тел (шар и конус, шар и цилиндр и др.), представляющая собой некоторую фигуру вращения, то часто нет надобности изображать всю фигуру, а достаточно изобразить только некоторое ее сечение плоскостью, проходящей через ось вращения, считая эту плоскость совпадающей с плоскостью чертежа.

**Пример 6.** Около шара радиуса  $r$  описан усеченный конус с боковой поверхностью  $S$ . Найти угол между образующей конуса и нижним основанием.

▲ Рассмотрим осевое сечение усеченного конуса с вписанным в него шаром (рис. 53).

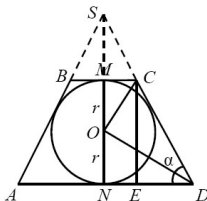


Рис. 53

Искомый угол — это угол  $\alpha$  между образующей конуса  $CD$  и ее проекцией  $ED$  на плоскость основания.

$$S_{\text{бок}} = \pi R_1 l_1 - \pi R_2 l_2,$$

где  $R_1, R_2$  — радиусы соответственно нижнего и верхнего оснований,  $l_1$  — образующая «большого» конуса,  $l_2$  — образующая «малого» конуса.

Так как центр  $O$  вписанной в трапецию  $ABCD$  окружности лежит на биссектрисах углов  $C$  и  $D$ , то

$$\text{из } \triangle NOD \quad R_1 = |ND| = r \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2},$$

$$\text{из } \triangle MOC \quad R_2 = |MC| = r \operatorname{ctg} \frac{\pi - \alpha}{2} = r \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}.$$

Выразим  $l_1$  и  $l_2$  через  $r$  и угол  $\alpha$ :

$$\text{из } \triangle SND \quad l_1 = \frac{R_1}{\cos \alpha} = \frac{r \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}}{\cos \alpha},$$

$$\text{из } \triangle SMC \quad l_2 = \frac{R_2}{\cos \alpha} = \frac{r \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{\cos \alpha}.$$

Теперь из формулы для  $S_{\text{бок}}$  находим:

$$S = \frac{\pi r^2 \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos \alpha} - \frac{\pi r^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos \alpha}.$$

$$\text{Из этого уравнения следует: } \sin \alpha = \sqrt{\frac{4\pi r^2}{S}}. \blacktriangledown$$

При решении задач по стереометрии довольно часто приходится иметь дело с похожими ситуациями. Рассмотрим некоторые из них (наиболее типичные для задач вступительного экзамена).

### Ситуация 1.

В условиях задачи речь идет о пирамиде, все ребра которой наклонены к плоскости основания под одним и тем же углом (рис. 54).

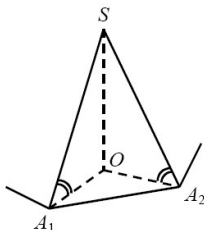


Рис. 54

В этом случае необходимо сделать вывод — вершина пирамиды проектируется в центр описанной около основания окружности. Действительно, все треугольники с общим катетом  $SO$  и гипотенузами — боковыми ребрами пирамиды ( $SA_i$ ) — равны между собой, и поэтому их другие катеты ( $OA_i$ ) также равны между собой, т.е. вершины  $A_i$  находятся от точки  $O$  на равных расстояниях  $R$ . Следовательно, точка  $O$  — центр описанной окружности.

## Ситуация 2.

В условии задачи дана пирамида, все грани которой равнонаклонены к плоскости основания или, другими словами, двугранные углы при сторонах основания равны (рис. 55).

В этом случае необходимо сделать вывод — вершина  $S$  пирамиды проектируется в центр вписанной в основание окружности. Действительно, проведя апофемы  $SB_i$  ( $SB_i \perp A_i A_{i+1}$ ) боковых граней, получим, что линейные углы  $SB_i O$  при сторонах оснований равны между собой. Следовательно, и все треугольники равны, а поэтому равны и расстояния  $OB_i$  от точки  $O$  до сторон основания, т.е.  $O$  служит центром вписанной в основание окружности.

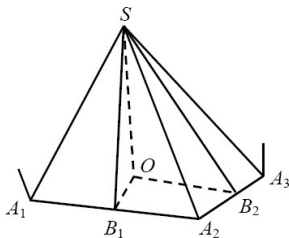


Рис. 55

### Ситуация 3.

В условии задачи говорится о пирамиде, вписанной в шар, все боковые ребра  $SA_i$  которой наклонены к плоскости основания под одинаковыми углами. В этой ситуации необходимо сделать вывод: центр шара лежит на высоте пирамиды, проведенной к ее основанию (или на продолжении высоты). Действительно, в этом случае вершина  $S$  пирамиды проектируется в центр описанной около основания окружности. Эта окружность есть сечение поверхности шара плоскостью основания. Следовательно, высота пирамиды лежит на диаметре шара, перпендикулярном к плоскости основания. Заметим, что в задачах с подобным условием нет надобности изображать сферу, обычно достаточно изобразить диаметр сферы  $SN$ , на котором лежит высота пирамиды (рис. 56).

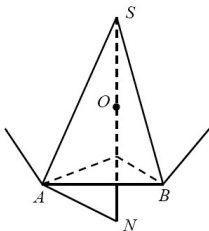


Рис. 56

Основной вывод, который при этом следует:  $\triangle SAN$  — прямоугольный, т.к. угол  $SAN$  — вписанный и опирается на диаметр  $SN$ ,  $|SN| = 2R$  ( $R$  — радиус описанного шара).

#### Ситуация 4.

В задаче сказано, что шар вписан в пирамиду, все грани которой равнонаклонены к плоскости основания. Из этого необходимо сделать вывод: центр вписанного в пирамиду шара лежит на высоте пирамиды. Действительно, пусть  $O$  — центр вписанного шара,  $H$  — его проекция на основание. Тогда, проводя апофемы  $SB_i$  и учитывая, что центр  $O$  лежит в биссекторных плоскостях двугранных углов при сторонах основания, получаем, что все треугольники  $OH B_i$  равны, и все отрезки  $HB_i$  равны между собой, т.е.  $H$  — центр вписанной в основание окружности, а значит, он лежит на высоте пирамиды. Как правило, в таких задачах тоже нет надобности изображать сферу, достаточно нарисовать фрагмент, изображенный на рис. 57.

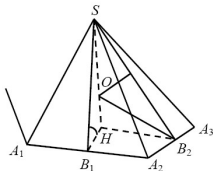
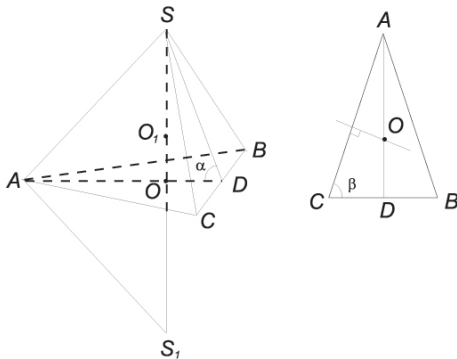


Рис. 57

**Пример 7.** В основании треугольной пирамиды  $SABC$  лежит равнобедренный треугольник  $ABC$  ( $AB = AC$ ) со стороной  $BC = 3$  см и углом  $\beta = \arccos(1/\sqrt{3})$  при вершине  $C$ . Боковые ребра пирамиды имеют равные длины. Боковая грань  $SBC$  наклонена к плоскости основания под углом  $\alpha = \arctg 2$ . Найти расстояние от центра описанного около пирамиды шара до плоскости основания.



Так как боковые ребра равнонаклонены к основанию, то вершина  $S$  пирамиды проектируется в центр  $O$  описанной около треугольника  $ABC$  окружности. Радиус  $AO$  описанной окружности найдем по теореме синусов:

$$\frac{BC}{\sin A} = 2R,$$

$$R = \frac{3}{2 \sin(\pi - 2\beta)} = \frac{3}{2 \sin 2\beta} = \frac{3}{4 \sin \beta \cdot \cos \beta} = \frac{3}{4 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{3}}} = \frac{9}{4\sqrt{2}}.$$

Итак,  $AO = R = \frac{9}{4\sqrt{2}}$  см.

Найдем длину высоты  $AD$  треугольника  $ABC$ .

$$AD = CD \cdot \operatorname{tg} \beta \quad \text{или} \quad AD = \frac{3}{2} \operatorname{tg} \beta = \frac{3}{2} \cdot \frac{\sqrt{\frac{2}{3}}}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \text{ (см)}.$$

Высоту  $SO$  пирамиды будем искать из  $\triangle SOD$ . Предварительно найдем

$$OD = AD - AO, \quad OD = \frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{9\sqrt{2}}{8} = \frac{3\sqrt{2}}{8} \text{ (см)}.$$

$$SO = OD \cdot \operatorname{tg} \alpha = \frac{3\sqrt{2}}{8} \cdot 2 = \frac{3\sqrt{2}}{4}.$$

Из  $\triangle SAO$  по теореме Пифагора

$$AS^2 = AO^2 + SO^2 = \frac{81}{32} + \frac{18}{16} = \frac{117}{32}$$

Так как вершина пирамиды проектируется в центр описанной около  $\triangle ABC$  окружности, то центр  $O_1$  описанного около пирамиды шара лежит на высоте пирамиды. Продолжим  $SO$  до пересечения со сферой в точке  $S_1$ . Тогда  $\triangle SAS_1$  – прямоугольный,  $SS_1$  его гипотенуза. Из подобия  $\triangle ASO$  и  $\triangle ASS_1$  получаем

$$SS_1 = \frac{AS^2}{SO} = \frac{117 \cdot 4}{32 \cdot 3\sqrt{2}} = \frac{39}{8\sqrt{2}} \text{ (см)}, R_{\text{шара}} = \frac{39}{16\sqrt{2}} \text{ (см)}.$$

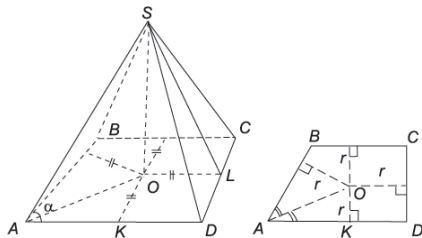
Расстояние от центра  $O_1$  шара по плоскости  $ABC$  есть длина отрезка  $OO_1$ :

$$|OO_1| = \left| \frac{3\sqrt{2}}{4} - \frac{39}{16\sqrt{2}} \right| = \frac{15\sqrt{2}}{32} \text{ (см)}$$

Замечание. Тот факт, что  $SO - SO_1 < 0$  означает, что центр описанного около пирамиды шара лежит вне пирамиды.

Ответ:  $\frac{15\sqrt{2}}{32}$ . ▼

**Пример 8.** В основании четырехугольной пирамиды лежит прямоугольная трапеция с большим основанием длины  $b$  и острым углом  $\alpha$ . Все боковые грани пирамиды равнонаклонены к основанию. Найти угол наклона большего бокового ребра к плоскости основания, если высота пирамиды равна  $H$ .



Очевидно, большее боковое ребро есть ребро  $AS$ . Так как боковые грани равнонаклонены к основанию, то вершина  $S$  пирамиды проектируется в центр  $O$  вписанной в основание окружности, который лежит на пересечении биссектрис внутренних углов трапеции.

Обозначим  $r$  радиус вписанной в основание окружности. Тогда

$$AD = AK + KD \text{ или } b = r \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} + r.$$

Отсюда

$$r = \frac{b}{1 + \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}}.$$

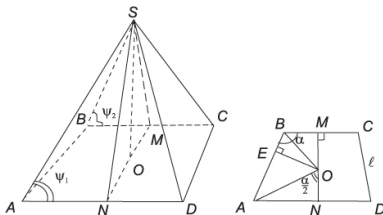
Из  $\triangle AOK$  находим  $AO = \frac{r}{\sin \frac{\alpha}{2}}$  или  $AO = \frac{b}{\sin \frac{\alpha}{2} \left(1 + \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}\right)}.$

Теперь из  $\triangle AOS$  находим

$$\operatorname{tg} \angle SAO = \frac{SO}{AO} = \frac{H \sin \frac{\alpha}{2} \left(1 + \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}\right)}{b} = \frac{H}{b} \left(\sin \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2}\right).$$

Ответ:  $\frac{H}{b} \left(\sin \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2}\right).$  ▼

**Пример 9.** В основании четырехугольной пирамиды лежит равнобокая трапеция с тупым углом  $\alpha$  и боковой стороной  $l$ . Все боковые грани равнонаклонены к основанию пирамиды. Найти углы наклона боковых ребер к параллельным сторонам основания пирамиды, если высота пирамиды равна  $H$ .



Так как боковые грани равнонаклонены к основанию пирамиды, то вершина  $S$  проектируется в центр вписанной в трапецию окружности. Поэтому

$$BC + AD = 2AB = 2l \text{ и } \angle BOA = 90^\circ, \quad \angle EBO = \frac{\alpha}{2}.$$

Следовательно  $BO = l \cos \frac{\alpha}{2}$ ,  $AO = l \sin \frac{\alpha}{2}$ .

Из треугольников  $BMO$  и  $AON$  находим

$$MO = ON = BO \cdot \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}l \sin \alpha; \quad AN = l \sin^2 \frac{\alpha}{2}; \quad BM = l \cos^2 \frac{\alpha}{2}.$$

Из  $\triangle SNO$  найдем высоту  $SN$  боковой грани:

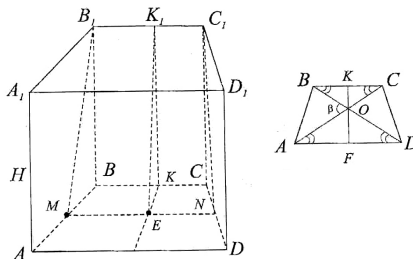
$$SN = \sqrt{H^2 + \frac{l^2 \sin^2 \alpha}{4}}.$$

Теперь из  $\triangle ASN$  и  $\triangle BSM$  находим искомые углы:

$$\operatorname{tg} \psi_1 = \frac{SN}{AN} = \frac{\sqrt{H^2 + \frac{l^2 \sin^2 \alpha}{4}}}{l \sin^2 \frac{\alpha}{2}}; \quad \operatorname{tg} \psi_2 = \frac{SM}{BM} = \frac{\sqrt{H^2 + \frac{l^2 \sin^2 \alpha}{4}}}{l \cos^2 \frac{\alpha}{2}}.$$

$$\text{Ответ: } \operatorname{tg} \psi_1 = \frac{\sqrt{4H^2 + l^2 \sin^2 \alpha}}{2l \sin^2 \frac{\alpha}{2}}; \quad \operatorname{tg} \psi_2 = \frac{\sqrt{4H^2 + l^2 \sin^2 \alpha}}{2l \cos^2 \frac{\alpha}{2}}. \quad \blacktriangledown$$

**Пример 10.** В основании прямой призмы лежит равнобокая трапеция, длины параллельных сторон которой равны  $a$  и  $b$  ( $a < b$ ). Острый угол между диагоналями трапеции равен  $\beta$ . Через меньшую из параллельных сторон верхнего основания и середину боковой стороны нижнего основания призмы проведено сечение. Найти площадь этого сечения, если длина высоты призмы равна  $H$ .



Сечение  $MB_1C_1N$  есть равнобокая трапеция. Через середину  $E$  отрезка  $MN$  проведем  $K_1E \perp MN$  и  $K_1K \perp BC$ . Тогда по теореме о трех перпендикулярах  $KE \perp MN$ .

$$S_{\text{сеч}} = \frac{MN + B_1C_1}{2} \cdot K_1E.$$

$MN$  — средняя линия трапеции  $ABCD$ , поэтому  $MN = \frac{a+b}{2}$ .  
Найдем высоту  $KF$  трапеции  $ABCD$ . Угол  $BOA$  — внешний для равнобедренного  $\triangle BOC$ , поэтому  $\angle OBC = \angle OCB = \frac{\beta}{2}$ . Тогда

$$KO = \frac{a}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}, \quad OF = \frac{b}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \quad \text{и} \quad KF = \frac{a+b}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}.$$

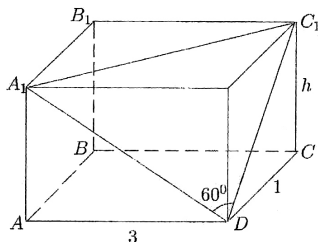
По теореме Пифагора из прямоугольного  $\triangle KEK_1$  находим

$$K_1E = \sqrt{H^2 + \frac{(a+b)^2}{4} \operatorname{tg}^2 \frac{\beta}{2}}$$

Ответ:  $S = \frac{3a+b}{4} \sqrt{\frac{(a+b)^2}{4} \operatorname{tg}^2 \frac{\beta}{2} + H^2}$  или

$$\frac{3a+b}{4} \sqrt{\frac{(a+b)^2}{4} \operatorname{ctg}^2 \frac{\beta}{2} + H^2}, \text{ если острым является угол } BOC. \blacktriangledown$$

**Пример 11.** В основании прямого параллелепипеда лежит прямоугольник, длины сторон которого равны 3 см и 1 см. Угол между диагоналями боковых граней, выходящими из одной вершины основания, равен  $60^\circ$ . Найти длину высоты параллелепипеда.



Вначале найдем диагональ  $A_1C_1$ :

$$A_1C_1 = AC = \sqrt{AD^2 + CD^2} = \sqrt{10},$$

Затем, из прямоугольных треугольников  $A_1AD$  и  $C_1CD$  выразим диагонали  $A_1D$  и  $C_1D$  через высоту пирамиды  $h$ :

$$A_1D = \sqrt{9 + h^2}, \quad C_1D = \sqrt{1 + h^2},$$

После этого, применяя к треугольнику  $A_1C_1D$  теорему косинусов, придем к уравнению для определения величины  $h$ :

$$A_1C_1^2 = A_1D^2 + C_1D^2 - 2 \cdot A_1D \cdot C_1D \cdot \cos 60^\circ,$$

$$10 = 9 + h^2 + 1 + h^2 - 2\sqrt{9 + h^2}\sqrt{1 + h^2} \cdot \frac{1}{2}, \quad \sqrt{(9 + h^2)(1 + h^2)} = 2h^2,$$

Делая замену переменной  $h^2 = t$  и возводя обе части последнего равенства в квадрат, получим квадратное уравнение:

$$3t^2 - 10t - 9 = 0$$

Корни этого уравнения имеют вид:

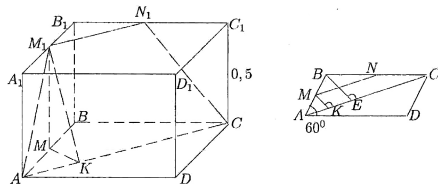
$$t_1 = \frac{5 + \sqrt{52}}{3}, \quad t_2 = \frac{5 - \sqrt{52}}{3}$$

Второй корень оказывается посторонним, так как  $t_2 < 0$ . Следовательно,

$$h^2 = \frac{5 + \sqrt{52}}{3} = \frac{5 + 2\sqrt{13}}{3}$$

Ответ:  $\sqrt{\frac{5+2\sqrt{13}}{3}}$ . ▼

**Пример 12.** В основании прямой призмы  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  лежит параллелограмм  $ABCD$  со сторонами  $AB = 2$  см,  $AD = 4$  см и острым углом  $\alpha = 60^\circ$  между ними. Высота призмы равна  $H = 0,5$  см. Через вершины  $A$  и  $C$  и середину  $M_1$  ребра  $A_1 B_1$  проведено сечение. Найти площадь этого сечения.



▲ Данным сечением является трапеция. Для доказательства этого утверждения заметим, что диагональ параллелограмма  $AC$  параллельна средней линии  $MN$  треугольника  $ABC$ , которая в свою очередь параллельна средней линии  $M_1 N_1$  треугольника  $A_1 B_1 C_1$ .

Таким образом  $M_1N_1$  параллельна  $AC$ . Из этого следует, что отрезок  $M_1N_1$  принадлежит сечению, а четырехугольник  $AM_1N_1C$ , у которого две стороны параллельны, а две другие не параллельны, является трапецией.

В параллелограмме  $ABCD$  из точки  $M$  (середины отрезка  $AB$ ) проведем перпендикуляр  $MK$  к диагонали  $AC$ . В силу «теоремы о трех перпендикулярах» отрезок  $M_1K$  также перпендикулярен  $AC$  и, следовательно, является высотой трапеции  $AM_1N_1C$ .

Площадь трапеции  $AM_1N_1C$  находится по формуле:

$$S = \frac{M_1N_1 + AC}{2} \cdot M_1K$$

Из параллелограмма  $ABCD$  будем иметь:

$$MK = \frac{1}{2}BE, \quad AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \angle ABC,$$

$$AC^2 = 4 + 16 + 2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} = 28, \quad AC = 2\sqrt{7}$$

Сравнивая две различные формулы для площади треугольника  $ABC$

$$\frac{1}{2} \cdot AC \cdot BE = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC \cdot \sin 120^\circ,$$

найдем величину  $BE = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$ , а следовательно,  $MK = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$ .

Высота сечения  $M_1K$  определяется из прямоугольного треугольника  $M_1MK$  по теореме Пифагора:

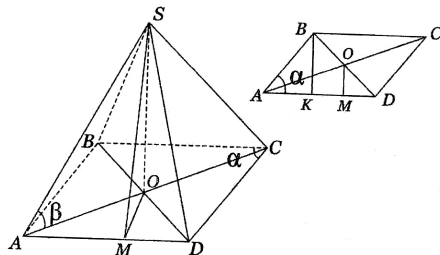
$$M_1K = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{7}} = \frac{\sqrt{19}}{2\sqrt{7}}.$$

Теперь найдем площадь сечения  $AM_1N_1C$ :

$$S = \frac{2\sqrt{7} + \sqrt{7}}{2} \cdot \frac{\sqrt{19}}{2\sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{19}}{4}.$$

Ответ:  $S = \frac{3\sqrt{19}}{4}$ . ▼

**Пример 13.** В основании пирамиды  $SABCD$  лежит параллелограмм со сторонами  $AB = a$ ,  $BC = b$  ( $a < b$ ) и острым углом  $\alpha$ . Большее боковое ребро пирамиды наклонено к плоскости основания под углом  $\beta$ . Вершина  $S$  пирамиды проектируется в точку пересечения диагоналей параллелограмма. Найти площадь грани  $ASD$ .



Из точки  $O$  пересечения диагоналей параллелограмма проведем перпендикуляр  $OM$  к стороне  $AD$ . Тогда отрезок  $SM$  также будет перпендикулярен стороне  $AD$  по теореме о трех перпендикулярах, то есть будет являться высотой боковой грани  $ASD$ . Остановимся на определении высоты  $SM$ . Из  $\triangle ABK$  найдем высоту параллелограмма  $BK = a \sin \alpha$ . Учитывая, что  $BK = 2OM$  получим  $OM = \frac{a}{2} \sin \alpha$ . Далее, из  $\triangle ABC$  по теореме косинусов найдем диагональ  $AC$ :

$$AC^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(180^\circ - \alpha) = a^2 + b^2 + 2ab \cos \alpha$$

Отсюда получим:

$$AO = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos \alpha}$$

Теперь из  $\triangle SOA$  найдем высоту пирамиды

$$SO = AO \operatorname{tg} \beta = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \beta \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos \alpha}$$

Зная  $OM$  и  $SO$ , из прямоугольного треугольника  $SOM$  найдем высоту  $SM$  боковой грани  $ASD$  по теореме Пифагора:

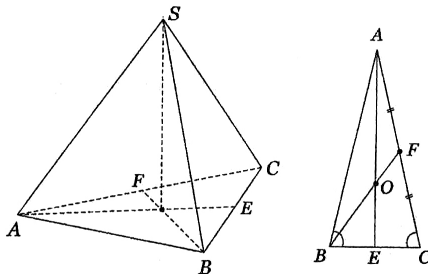
$$SM^2 = \frac{1}{4} \operatorname{tg}^2 \beta (a^2 + b^2 + 2ab \cos \alpha) + \frac{a^2}{4} \sin^2 \alpha$$

Для площади боковой грани  $ASD$  получим следующее выражение:

$$S_{ASD} = \frac{1}{2}b \cdot SM = \frac{1}{4}b\sqrt{(a^2 + b^2 + 2ab \cos \alpha) \operatorname{tg}^2 \beta + a^2 \sin^2 \alpha}.$$

Ответ:  $S_{ASD} = \frac{1}{4}b\sqrt{(a^2 + b^2 + 2ab \cos \alpha) \operatorname{tg}^2 \beta + a^2 \sin^2 \alpha}$ . ▼

**Пример 14.** В основании треугольной пирамиды  $SABC$  лежит равнобедренный треугольник  $ABC$  ( $AB = AC$ ). Радиус вписанной в  $\triangle ABC$  окружности равен  $\frac{4}{3}$ ,  $\angle ABC = \arcsin \frac{3}{5}$ . Вершина  $S$  пирамиды проектируется в точку пересечения медиан  $\triangle ABC$ . Найти  $\angle ASB$ , если высота пирамиды равна 2.



Вначале установим связь между сторонами треугольника  $ABC$ .

Из треугольника  $ABE$  найдем:

$$\cos \left( \arcsin \frac{3}{5} \right) = \frac{BE}{AB} \Rightarrow BC = 2BE = \frac{8}{5}AB$$

Используя формулу для радиуса вписанной окружности, получим:

$$\frac{4}{3} = r = \frac{S}{p} = \frac{\frac{1}{2}AB \cdot BC \cdot \sin \angle ABC}{AB + \frac{BC}{2}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot AB \cdot \frac{8}{5} \cdot AB \cdot \frac{3}{5}}{AB + \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{5} \cdot AB} = \frac{4}{15}AB,$$

где  $S$  — площадь треугольника  $ABC$ ,  $p$  — его полупериметр. Таким образом, стороны треугольника  $ABC$  равны:

$$AB = AC = 5, \quad BC = 8$$

Применяя к треугольнику  $BFC$  теорему косинусов, найдем медиану  $BF$ , проведенную к стороне  $AC$ :

$$BF^2 = BC^2 + \frac{AC^2}{4} - 2BC \frac{AC}{2} \cos \arcsin \frac{3}{5} = \frac{153}{4}, \quad BF = \frac{\sqrt{153}}{2}$$

Учитывая, что точка пересечения медиан делит каждую медиану в отношении  $2 : 1$ , считая от вершины треугольника, будем иметь:

$$OB = \frac{2}{3}BF = \frac{\sqrt{153}}{3}$$

Ребро  $SB$  находится из  $\triangle SOB$  по теореме Пифагора:

$$SB^2 = SO^2 + OB^2 = 21, \quad SB = \sqrt{21},$$

Далее, из  $\triangle ASO$  найдем ребро  $AS$ :

$$AE = 3, AO = \frac{2}{3}AE = 2, AS^2 = SO^2 + AO^2 = 8, \quad AS = 2\sqrt{2},$$

Применяя к треугольнику  $ASB$  теорему косинусов, найдем косинус  $\angle ASB$ :

$$AB^2 = AS^2 + SB^2 - 2AS \cdot SB \cos \angle ASB, \quad \cos \angle ASB = \frac{1}{\sqrt{42}}.$$

Ответ:  $\cos \angle ASB = \frac{1}{\sqrt{42}}$ . ▼