

Общая программа курса «Математический анализ» (2014/2015 уч. г., 3 семестр, группы 1–2)

Составитель: М. Э. Абрамян

Часть 1. Мера Жордана в \mathbf{R}^n

Декартово произведение множеств. Парно не пересекающиеся множества, разбиение множества, декартово произведение множеств: определения. Примеры декартовых произведений. Свойства декартовых произведений: критерий того, что декартово произведение является пустым множеством; вложение и пересечение декартовых произведений; разность декартовых произведений с двумя сомножителями и в общем случае; разбиение декартова произведения (все свойства без доказательства, за исключением свойства разности декартовых произведений с двумя сомножителями).

Клетки. Клетка I в \mathbf{R}^n и ее мера $m(I)$: определения. Клетка Π в \mathbf{R}^n и ее мера $m(\Pi)$: определения. Свойства клеток в \mathbf{R}^n (без доказательства): клетки нулевой меры, замкнутые и открытые клетки, пересечение и разность клеток, мера внутренности и замыкания клетки, суммарная мера разбиения клетки. Свойства клеток в \mathbf{R}^n (без доказательства): внутренность и замыкание клеток, их меры; пересечение клеток; стандартное разбиение декартова произведения клеток; суммарная мера произвольного разбиения клетки.

Клеточные множества. Клеточное множество A в \mathbf{R}^n и его мера $m(A)$: определения и теорема о корректности определения меры клеточного множества (без доказательства). Свойства клеточных множеств: объединение двух непересекающихся (и произвольного числа парно непересекающихся) клеточных множеств; декартово произведение клеточных множеств; разность двух клеток как клеточное множество (без доказательства); разность, пересечение и объединение двух клеточных множеств; соотношения между мерами множеств A и B , если $A \subset B$; оценка для меры объединения p клеточных множеств.

Измеримые по Жордану множества. Множество Ω , измеримое по Жордану, и его мера $m(\Omega)$: определение и доказательство корректности определения меры измеримого по Жордану множества. Свойства множества жордановой меры нуль: критерий для множества жордановой меры нуль, объединение конечного числа множеств жордановой меры нуль, подмножество множества жордановой меры нуль. Критерий измеримости множества Ω в \mathbf{R}^n (Ω ограничено, $m(\Omega)$ имеет жорданову меру нуль; без доказательства). Свойства множеств, измеримых по Жордану: пересечение, разность, объединение измеримых множеств; оценка для меры объединения p множеств, измеримых по Жордану (конечная аддитивность меры Жордана). Пример неизмеримого по Жордану множества.

Часть 2. Кратные интегралы

Определение кратного интеграла. Разбиение измеримого по Жордану множества, диаметр множества, мелкость разбиения, продолжение разбиения: определения. Интегральная сумма $\sigma_r(f, \xi, G)$ функции f , определенной на измеримом множестве G , соответствующая разбиению T и выборке ξ ; верхняя и нижняя суммы Дарбу функции f , соответствующие разбиению T : определения. Кратный интеграл Римана функции f по измеримому множеству $G \subset \mathbf{R}^n$: определение и связь данного определения при $n = 1$ с определением интеграла от функции, заданной на отрезке. Пример, показывающий, что при $n > 1$ неограниченная функция может быть интегрируемой. Функция, существенно неограниченная на измеримом множестве: определение, свойство существенно неограниченных функций (без доказательства). Два критерия интегрируемости ограниченной функции в терминах сумм Дарбу (без доказательства).

Свойства кратного интеграла и классы интегрируемых функций. Свойства кратного интеграла: интеграл от постоянной функции; интеграл от неотрицательной функции; линейность интеграла относительно подынтегральной функции; сравнение кратных интегралов; теорема о среднем для кратного интеграла от непрерывной функции; интегрируемость произведения; конечная аддитивность интеграла по области интегрирования (два последних свойства — без доказательства). Теорема об интегрируемости функции, непрерывной на компактном измеримом множестве (без доказательства). Теорема об интегрируемости функции, ограниченной на компактном измеримом множестве G и имеющей множество точек разрыва меры нуль, следствие (в котором отсутствует условие компактности измеримого множества G).

Сведение кратных интегралов к повторным. Цилиндр в \mathbf{R}^n : определение и лемма о цилиндре с измеримым основанием (без доказательства). Теорема о том, что график интегрируемой функции имеет меру нуль, следствие об измеримости области, граница которой составлена из графиков непрерывных функций. Теорема о сведении двойного интеграла по прямоугольнику к повторному интегралу, следствия (о равенстве повторных интегралов по прямоугольнику для интегрируемой и для непрерывной функции). Элементарная область в \mathbf{R}^2 относительно оси y : определение и теорема о сведении двойного интеграла по элементарной области к повторному интегралу; следствие для непрерывных функций. Элементарные области в \mathbf{R}^3 и \mathbf{R}^n : определения и теоремы о сведении тройного и кратного интеграла по элементарной области к повторному интегралу (без доказательства).

Замена переменных в кратном интеграле. Вывод формулы замены переменных вида $x = \varphi(t)$ для интеграла по неориентированному отрезку в случае взаимно-однозначной дифференцируемой функции φ . Диффеоморфизм из \mathbf{R}^n в \mathbf{R}^n , его матрица Якоби и якобиан: определения. Формула замены переменных $x = \varphi(y)$ для

кратного интеграла в случае диффеоморфизма φ (без доказательства). Применения формулы замены переменных: случай линейного преобразования, в том числе ортогонального преобразования и преобразования подобия; геометрический смысл определителя матрицы A как ориентированного объема параллелепипеда, определяемого линейно независимыми вектор-столбцами данной матрицы.

Часть 3. Несобственные интегралы и числовые ряды

Определение и основные свойства несобственного интеграла. Несобственный интеграл по полубесконечному промежутку и по конечному промежутку от неограниченной функции: определения. Общее определение несобственного интеграла с особенностью в правом (левом) конце. Арифметические свойства несобственного интеграла: линейность относительно подынтегральной функции и аддитивность относительно промежутка интегрирования. Замена переменных и интегрирование по частям в несобственном интеграле (без доказательства). Совпадение собственного и несобственного интеграла в случае, если функция интегрируема на промежутке в обычном смысле. Критерий Коши сходимости несобственного интеграла.

Абсолютная и условная сходимость несобственных интегралов. Абсолютно сходящиеся несобственные интегралы: определение, лемма о том, что абсолютно сходящийся интеграл является сходящимся. Несобственные интегралы от неотрицательных функций: критерий сходимости, признак сравнения и следствие из него (следствие без доказательства). Условно сходящиеся несобственные интегралы: определение и пример. Признак Дирихле условной сходимости несобственного интеграла. Интегралы с несколькими особенностями. Сходимость несобственного интеграла в смысле главного значения по Коши: определение и пример.

Определение и основные свойства числового ряда. Числовой ряд, частичная сумма ряда, сходимость числового ряда: определения и пример (сумма геометрической прогрессии). Критерий Коши сходимости числового ряда. Необходимый признак сходимости. Абсолютно сходящиеся числовые ряды: определение, лемма о том, что абсолютно сходящийся ряд сходится.

Числовые ряды с неотрицательными членами. Критерий сходимости неотрицательных числовых рядов (в терминах ограниченности сверху частичных сумм) и признак сравнения. Интегральный признак сходимости неотрицательных числовых рядов, примеры. Признак сходимости Даламбера, следствие (признак Даламбера в предельной форме; следствие без доказательства). Признак сходимости Коши, следствие (признак Коши в предельной форме; следствие без доказательства).

Знакопеременные ряды. Знакопередающийся ряд (ряд Лейбница): определение, теорема о сходимости, оценка скорости сходимости ряда Лейбница. Признак сходимости Дирихле (без доказательства). Признак сходимости Абеля.

Часть 4. Функциональные последовательности и ряды. Степенные ряды

Определение и основные свойства функциональных последовательностей и рядов. Функциональная последовательность и ее сходимость в точке и на множестве: определения и примеры. Функциональный ряд и его сходимость в точке и на множестве: определения. Равномерная сходимость функциональной последовательности и ряда: определения. Критерий равномерной сходимости последовательности $f_n(x)$ в терминах предела супремума разности $|f_n(x) - f(x)|$ (где $f(x)$ — предельная функция последовательности); следствие (критерий равномерной сходимости функционального ряда). Критерий Коши равномерной сходимости функциональной последовательности; следствие (критерий Коши равномерной сходимости функционального ряда).

Признаки равномерной сходимости функциональных рядов. Признак Вейерштрасса, следствие. Признаки Дирихле и Абеля (оба признака без доказательства).

Свойства равномерно сходящихся функциональных последовательностей и рядов. Непрерывность предельной функции равномерно сходящейся функциональной последовательности непрерывных функций; следствие о непрерывности суммы равномерно сходящегося функционального ряда с непрерывными членами. Интегрирование равномерно сходящейся функциональной последовательности непрерывных функций; следствие о почленной интегрируемости равномерно сходящегося функционального ряда с непрерывными членами. Дифференцирование равномерно сходящейся функциональной последовательности; следствие о почленной дифференцируемости равномерно сходящегося функционального ряда с дифференцируемыми членами.

Степенные ряды. Степенной ряд: определение. Две теоремы об абсолютной и равномерной сходимости степенного ряда, радиус сходимости степенного ряда: определение. Верхний и нижний пределы числовой последовательности: определение. Теорема Коши-Адамара о нахождении радиуса сходимости степенного ряда, доказательство формулы для радиуса сходимости в случае обычного предела, примеры применения формулы в случае, когда обычного предела не существует. Теоремы о непрерывности, дифференцируемости и интегрируемости степенного ряда на интервале его сходимости.

Ряд Тейлора. Вещественная аналитическая функция: определение. Бесконечная дифференцируемость вещественной аналитической функции. Ряд Тейлора функции: определение. Пример, показывающий, что бесконечной дифференцируемости недостаточно для разложения функции в ряд Тейлора. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа (без доказательства). Теорема о разложении в ряд Тейлора функции, все производные которой равномерно ограничены, следствия (разложение в ряд Тейлора функций e^x , $\sin x$, $\cos x$). Разложение в ряд Тейлора функции $(1+x)^\alpha$ (без обоснования). Обоснование разложения в ряд Тейлора функции $\ln(1+x)$, основанное на почленном интегрировании ряда Тейлора для функции $1/(1+x)$. Разложение в ряд Тейлора функции $\arcsin x$.

Часть 5. Ряды Фурье

Вещественное евклидово пространство E : определение, неравенство Коши-Буняковского. Норма вектора в евклидовом пространстве: определение, неравенство треугольника. Ортогональная и ортонормированная система: определение. Коэффициенты Фурье, частичная сумма Фурье и формальный ряд Фурье элемента евклидова пространства по ортонормированной системе: определения. Теорема об экстремальном свойстве частичных сумм Фурье, следствие (неравенство Бесселя).

Скалярное произведение на классах эквивалентности функций, интегрируемых по Риману, евклидово пространство $R([-π, π])$: определения. Тригонометрическая система функций $\{(2π)^{-1/2}, (π)^{-1/2}\cos(kx), (π)^{-1/2}\sin(kx), k = 1, 2, \dots\}$, доказательство ее ортонормированности в $R([-π, π])$. Ортонормированные тригонометрические системы функций в $R([-l, l])$ и $R([a, b])$. Коэффициенты Фурье, формальный ряд Фурье по тригонометрической системе функций, неравенство Бесселя (два представления).

Полная система в евклидовом пространстве E : определение. Равенство Парсеваля для коэффициентов ряда Фурье по полной ортонормированной системе в E ; следствие о сходимости по норме E ряда Фурье по полной ортонормированной системе. Теорема Вейерштрасса о равномерной аппроксимации непрерывной $2π$ -периодической функции тригонометрическими полиномами (без доказательства). Теорема об аппроксимации в $R([-π, π])$ кусочно-непрерывной функции тригонометрическими полиномами. Следствие о сходимости по норме $R([-π, π])$ ряда Фурье кусочно-непрерывной функции.

Кусочно-непрерывно дифференцируемая функция: определение. Теорема о поточечной сходимости ряда Фурье кусочно-непрерывно дифференцируемой функции (без доказательства). Теорема о равномерной сходимости ряда Фурье непрерывной $2π$ -периодической функции с кусочно-непрерывной производной. Асимптотическое свойство коэффициентов ряда Фурье функции с кусочно-непрерывной производной $(n+1)$ -го порядка.

Литература

1. Ильин В. А., Садовничий В. А., Сендов Б. Х. Математический анализ. Т. 1, 2. — М.: Изд-во МГУ, 1985.
2. Кудрявцев Л. Д. Курс математического анализа. Т. 1, 2. — М.: Высшая школа, 1981.
3. Никольский С. М. Курс математического анализа. Т. 1, 2. — М.: Наука, 1983.
4. Тер-Крикоров А. М., Шабунин М. И. Курс математического анализа. — М.: Наука, 1988.
5. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1, 2 (любое издание).