Уравнения математической физики.
Задачи и решения

С. В. Ревина, Л. И. Сазонов, О. А. Цывенкова

Оглавление

Введение

Учебник предназначен для проведения практических занятий по уравнениям математической физики со студентами третьего курса факультета математики, механики и компьютерных наук. Учебник базируется на лекциях, которые были разработаны, прочитаны и опубликованы профессором Виктором Иосифовичем Юдовичем.

Авторы учебника — опытные преподаватели, которые придерживаются следующей концепции проведения занятий. Студент, обладающий практическими навыками по данному курсу, должен не просто уметь решать задачи по готовым рецептам. Он должен понимать физический смысл постановок задач, активно применять теорию уравнений в частных производных, видеть связь между математической физикой и другими предметами — математическим анализом, алгеброй, обыкновенными дифференциальными уравнениями, функциональным анализом.

В первой главе рассматриваются задачи на собственные значения для обыкновенных дифференциальных уравнений, вторая глава посвящена классификации уравнений в частных производных второго порядка.

В третьей главе выводятся уравнения теплопроводности и диффузии при различных предположениях, а также ставятся начально-краевые задачи.

Четвертая глава посвящена конечномерным моделям — в ней рассматривается уравнение теплопроводности в пространстве тригонометрических многочленов.

В пятой и шестой главе метод Фурье применяется для решения однородных и неоднородных уравнений.

В седьмой главе решаются задачи в бесконечных областях на основе применения преобразования Фурье.

Первая, третья, четвертая глава написаны С.В.Ревиной, вторая, пятая и шестая глава — О.А.Цывенковой, седьмая глава — Л.И.Сазоновым.

Глава 1

Задачи на собственные значения

1.1 Первая краевая задача

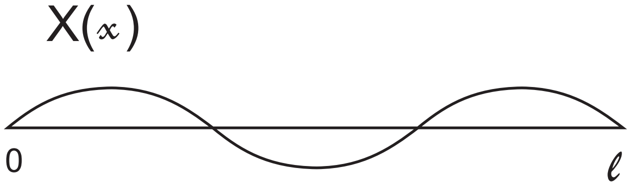
Физическая формулировка задачи. Найти собственные поперечные колебания однородной струны с закрепленными жестко краями.

Пусть в состоянии покоя струна занимает отрезок $0 \leqslant x \leqslant \ell$ вещественной оси. Тогда каждой точке $x \in [0, \ell]$ можно поставить в соответствие $X(x)$ — поперечное отклонение струны от равновесного состояния. Функция $X(x)$ удовлетворяет уравнению собственных колебаний струны с собственными частотами λ. Так как по условию концы струны жестко закреплены, то отклонение на концах равно нулю:

$$X(0) = 0, \quad X(\ell) = 0.$$

Таким образом, приходим к первой краевой задаче для уравнения колебаний струны.

$$\begin{aligned} X'' + \lambda X &= 0, \quad x \in (0, \ell); & (1.1)\\ X(0) &= 0; & (1.2)\\ X(\ell) &= 0. & (1.3) \end{aligned}$$



Требуется найти значения параметра λ (собственные значения), при которых существуют нетривиальные решения уравнения (1.1) (собственные функции), удовлетворяющие краевым условиям (1.2)—(1.3).

Сначала докажем важное свойство собственных значений первой краевой задачи — вещественность и положительность.

Задача 1.1. Не решая уравнение, доказать, что собственные значения первой краевой задачи вещественны и положительны.

Доказательство. Предположим, что $\lambda \in \mathbb{C}$ — некоторое собственное значение, и ему отвечает $X(x) \not\equiv 0$ — вообще говоря, комплекснозначная собственная функция.

Запишем исходное уравнение (1.1) в виде

$$-X'' = \lambda X.$$

Умножим обе части последнего уравнения на $X^*(x)$ и проинтегрируем по x от 0 до ℓ (звездочка означает комплексное сопряжение):

$$-\int\limits_0^\ell X''(x)X^*(x)dx = \lambda \int\limits_0^\ell X(x)X^*(x)dx. \tag{1.4}$$

Учитывая, что произведение комплексного числа на комплексно-сопряженное представляет собой квадрат модуля этого числа, преобразуем правую часть равенства:

$$-\int\limits_0^\ell X''(x)X^*(x)dx = \lambda \int\limits_0^\ell |X(x)|^2 dx.$$

В левой части применим формулу интегрирования по частям:

$$-\int\limits_0^\ell X''(x)X^*(x)dx = -X^*(x)X'(x)\Big|_0^\ell + \int\limits_0^\ell |X'(x)|^2 dx.$$

В силу краевых условий (1.2)—(1.3) подстановка обращается в ноль.

Окончательно, (1.4) принимает вид:

$$\int_0^\ell |X'(x)|^2 dx = \lambda \int_0^\ell |X(x)|^2 dx.$$

Так как $X(x) \not\equiv 0$, то из последнего равенства можно выразить λ:

$$\lambda = \frac{\int_0^\ell |X'(x)|^2 dx}{\int_0^\ell |X(x)|^2 dx}.$$

Очевидно, что λ вещественно и неотрицательно.

Отдельно рассмотрим случай $\lambda = 0$. Предположим, что $\lambda = 0$ является собственным значением. Из равенства

$$\int_0^\ell |X'(x)|^2 dx = 0$$

вытекает, что $|X'(x)|^2 = 0$ почти всюду на отрезке $[0, \ell]$. Так как $X'(x)$ непрерывна, то

$$X'(x) \equiv 0.$$

Следовательно, $X(x) = const$, а из краевых условий выводим, что константа равна нулю. Таким образом, нулевому значению λ соответствует лишь тривиальное решение. Поэтому собственные значения превой краевой задачи положительны. $\square$

Теперь найдем решения задачи на собственные значения для краевых условий первого рода.

Задача 1.2. Найти собственные значения и собственные функции первой краевой задачи (1.1)—(1.3).

Составим характеристический многочлен уравнения и найдем его корни:

$$\mu^2 + \lambda = 0; \quad \mu_{1,2} = \pm i\sqrt{\lambda}.$$

Так как уже доказано, что λ вещественно и неотрицательно, то корни характеристического многочлена чисто мнимые, и общее решение уравнения имеет вид:

$$X(x) = A\cos(\sqrt{\lambda}x) + B\sin(\sqrt{\lambda}x).$$

Учтем краевые условия. Из краевого условя в нуле(1.2) следует, что

$$X(0) = A = 0.$$

Из краевого условия в $x = \ell$ (1.3) приходим к уравнению

$$X(\ell) = B\sin(\sqrt{\lambda}\ell) = 0.$$

Постоянная B не может обращаться в ноль, так как разыскивается нетривиальное решение. Следовательно, должно выполняться равенство

$$\sin(\sqrt{\lambda}\ell) = 0.$$

Учитывая положительность λ, находим корни последнего уравнения

$$\sqrt{\lambda}\ell = \pi k, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Следовательно, множество собственных значений счетно, и они задаются формулой

$$\lambda_k = \left(\frac{\pi k}{\ell}\right)^2, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Им соответствуют собственные функции

$$X_k(x) = B_k \sin\frac{\pi k}{\ell}x, \quad k \in \mathbb{N}.$$

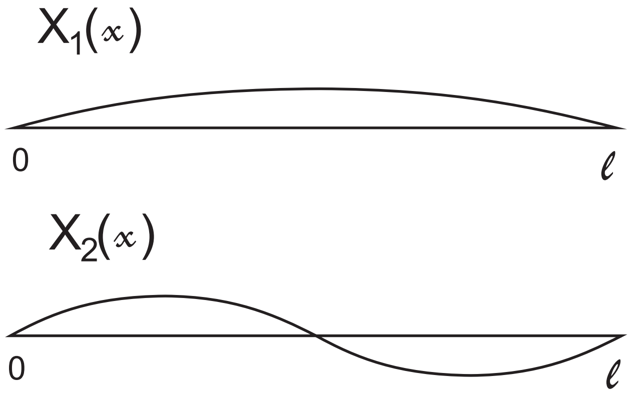
Так как решение однородного уравнения с однородными краевыми условиями определяется с точностью до постоянного множителя, то B_k — произвольные ненулевые постоянные. Положим $B_k = 1$.

Ответ. Собственные значения первой краевой задачи имеют вид

$$\lambda_k = \left(\frac{\pi k}{\ell}\right)^2, \quad k \in \mathbb{N},$$

а собственные функции

$$X_k(x) = \sin\frac{\pi k}{\ell}x, \quad k \in \mathbb{N}.$$



Если в качестве струны с закрепленными концами рассматривать струну музыкального инструмента, то можно сказать, что собственные функции мы видим, а собственные значения слышим. Действительно, собственные функции представляют собой амплитуду колебаний струны, а собственные значения — это квадраты собственных частот колебаний

$$\omega_k = \frac{\pi k}{\ell}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Самая низкая частота — в данном случае

$$\omega_1 = \frac{\pi}{\ell}$$

— называется основным тоном струны, а остальные — обертонами. Тембр звука зависит от основного тона и обертонов.

Интересно пофантазировать о том, как изменился бы мир звуков, если бы собственных значений было бы, например, конечное , а не счетное число, или они бы составляли множество мощности континуум.

Отметим, что помимо собственных поперечных колебаний струны, уравнение (1.1) описывает также собственные продольные колебания струны, стержня и пружины.

Следующие задачи с помощью замены либо независимой переменной, либо неизвестной функции сводятся к "стандартной"краевой задаче (1.1)—(1.3).

Задача 1.3. Найдите собственные значения и собственные функции первой краевой задачи на отрезке $x \in [a, b]$:

$$\begin{aligned} X'' + \lambda X &= 0, \quad x \in (a, b); \\ X(a) &= 0; \\ X(b) &= 0. \end{aligned}$$

Ответ. Собственные значения и собственные функции имеют вид

$$\lambda_k = \left(\frac{\pi k}{b-a}\right)^2, \quad X_k = \sin\frac{\pi k}{b-a}(x-a) \quad k \in \mathbb{N}.$$

Задача 1.4. Пусть k — фиксированная постоянная. Найдите собственные значения λ и собственные функции следующей задачи:

$$\begin{aligned} X'' + kX' + \lambda X &= 0, \quad x \in (0, \ell); \\ X(0) &= 0; \\ X(\ell) &= 0. \end{aligned}$$

Ответ. Собственные значения и собственные функции имеют вид:

$$\lambda_k = \frac{k^2}{4} + \left(\frac{\pi k}{\ell}\right)^2; \quad X_k = e^{-\dfrac{kx}{2}} \sin\frac{\pi k}{\ell}x \quad k \in \mathbb{N}.$$

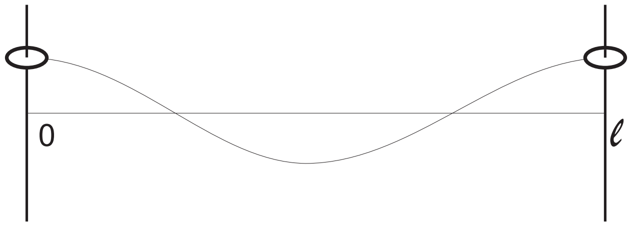
1.2 Вторая краевая задача

Физическая формулировка задачи. Найти собственные поперечные колебания однородной струны, если концы струны свободны.

Пусть, по-прежнему, $X(x)$, $x \in [0, \ell]$ — поперечное отклонение струны от равновесного состояния. Уравнение собственных колебаний струны остается неизменным, а условия свободных концов математически записывается как равенство нулю производных функции $X(x)$ на границе:

$$X'(0) = 0, \quad X'(\ell) = 0.$$

Это связано с тем, что сила натяжения струны пропорциональна первой производной.



Наличие свободных концов можно наглядно представить следующим образом: на концы струны надеты колечки, которые могут свободно двигаться по стерженькам, расположенным перпендикулярно оси x.

Таким образом, приходим ко второй краевой задаче для уравнения колебаний струны.

$$X'' + \lambda X = 0, \quad x \in (0, \ell); \tag{1.5}$$

$$X(0) = 0; \tag{1.6}$$

$$X(\ell) = 0. \tag{1.7}$$

Требуется найти значения параметра λ (собственные значения), при которых существуют нетривиальные решения уравнения (1.5) (собственные функции), удовлетворяющие краевым условиям (1.6)—(1.7).

Оказывается, что, в отличие от первой краевой задачи, у второй краевой задачи есть нулевое собственное значение.

Задача 1.5. Не решая уравнение, доказать, что собственные значения второй краевой задачи вещественны и неотрицательны, причем $\lambda = 0$ является собственным значением, и ему отвечает собственная функция $X = const$.

Доказательство. Повторяя те же рассуждения, что и в случае краевых условий первого рода, приходим к тому же самому выражению для собственных значений:

$$\lambda = \frac{\int\limits_0^\ell |X'(x)|^2 dx}{\int\limits_0^\ell |X(x)|^2 dx}.$$

Очевидно, что λ вещественно и неотрицательно.

Осталось рассмотреть случай $\lambda = 0$. Предположим, что $\lambda = 0$ является собственным значением. Из равенства

$$\int\limits_0^\ell |X'(x)|^2 dx = 0$$

вытекает, что $|X'(x)|^2 = 0$ почти всюду на отрезке $[0, \ell]$. Так как $X'(x)$ непрерывна, то

$$X'(x) \equiv 0.$$

Следовательно, $X(x) = const$. Но константа удовлетворяет краевым условиям (1.6)—(1.7). Таким образом, нулевому значению λ в качестве собственной функции соответствует ненулевая константа.

$\square$

Теперь найдем решения задачи на собственные значения для краевых условий второго рода.

Задача 1.6. Найти собственные значения и собственные функции второй краевой задачи (1.5)—(1.7).

Как уже было доказано, $\lambda = 0$ является собственным значением, и ему отвечает собственная функция $X_0 = 1$.

Пусть теперь $\lambda > 0$. Тогда общее решение уравнения имеет вид:

$$X(x) = A\cos(\sqrt{\lambda}x) + B\sin(\sqrt{\lambda}x),$$

и его производная вычисляется по формуле

$$X'(x) = -\sqrt{\lambda}A\sin(\sqrt{\lambda}x) + \sqrt{\lambda}B\cos(\sqrt{\lambda}x).$$

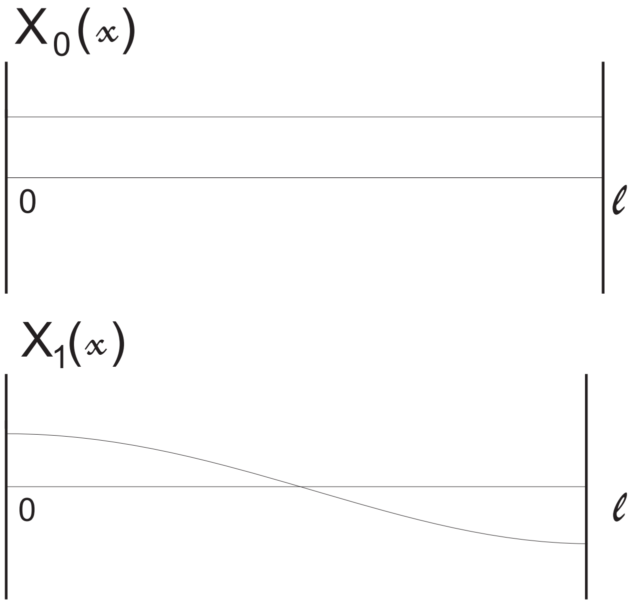
Учтем краевые условия. Из краевого условия в нуле (1.6) следует, что

$$X'(0) = \sqrt{\lambda}B = 0.$$

Так как $\lambda > 0$, то $B = 0$.

Из краевого условия на конце $x = \ell$ (1.7) приходим к уравнению

$$X'(\ell) = -\sqrt{\lambda}A\sin(\sqrt{\lambda}\ell) = 0.$$



Так как $A \neq 0$ и $\lambda > 0$, то, как и для задачи с краевыми условиями первого рода, должно выполняться уравнение:

$$\sin(\sqrt{\lambda}\ell) = 0.$$

Следовательно, для положительных собственных значений получаем те же выражения, что и в случае первой краевой задачи

$$\lambda_k = \left(\frac{\pi k}{\ell}\right)^2, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Каждому λ_k соответствует собственная функция

$$X_k(x) = A_k \cos\frac{\pi k}{\ell}x, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Положим $A_k = 1$.

Ответ. Собственные значения второй краевой задачи имеют вид

$$\lambda_0 = 0, \quad \lambda_k = \left(\frac{\pi k}{\ell}\right)^2, \quad k \in \mathbb{N},$$

а собственные функции

$$X_0 = 1, \quad X_k(x) = \cos\frac{\pi k}{\ell}x, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Аналогично можно рассматривать смешанные краевые условия. В следующих задачах на одном конце струны ставится краевое условие первого рода, а на другом — второго рода.

Задача 1.7. Рассмотрим собственные поперечные колебания однородной струны $x \in [0, \ell]$, если левый конец струны жестко закреплен, а правый свободен.

1. Выпишите математическую постановку задачи.
2. Докажите, что собственные значения вещественны и положительны.
3. Найдите собственные значения и собственные функции.

Ответ. Для задачи

$$X'' + \lambda X = 0, \quad x \in (0, \ell); \tag{1.8}$$

$$X(0) = 0; \tag{1.9}$$

$$X'(\ell) = 0. \tag{1.10}$$

собственные значения и собственные функции имеют вид:

$$\lambda_k = \left(\frac{\pi(2k-1)}{2\ell}\right)^2, \quad X_k = \sin\frac{\pi(2k-1)}{2\ell}x \quad k \in \mathbb{N}.$$

Задача 1.8. Рассмотрим собственные поперечные колебания однородной струны $x \in [0, \ell]$, если левый конец струны свободен, а правый жестко закреплен.

1. Выпишите математическую постановку задачи.
2. Докажите, что собственные значения вещественны и положительны.
3. Найдите собственные значения и собственные функции.

Ответ. Для задачи

$$X'' + \lambda X = 0, \quad x \in (0, \ell); \tag{1.11}$$

$$X'(0) = 0; \tag{1.12}$$

$$X(\ell) = 0. \tag{1.13}$$

собственные значения и собственные функции имеют вид:

$$\lambda_k = \left(\frac{\pi(2k-1)}{2\ell}\right)^2, \quad X_k = \cos\frac{\pi(2k-1)}{2\ell}x \quad k \in \mathbb{N}.$$

1.3 Задача о кольце

Пусть теперь уравнение

$$X'' + \lambda X = 0$$

выполняется на интервале длины 2ℓ: $x \in (-\ell, \ell)$. Предположим, что концы отрезка $x = -\ell$ и $x = \ell$ отождествляются. Тогда отрезок превращается в кольцо. Так как рассматриваемое уравнение — второго порядка, то условия отождествления концов отрезка можно записать так: в точках $x = -\ell$ и $x = \ell$ совпадают значения функции $X(x)$ и ее первой производной

$$X(-\ell) = X(\ell); \quad X'(-\ell) = X'(\ell).$$

Таким образом, приходим к задаче на собственные значения

$$X'' + \lambda X = 0, \quad x \in (-\ell, \ell); \tag{1.14}$$

$$X(-\ell) = X(\ell); \tag{1.15}$$

$$X'(-\ell) = X'(\ell). \tag{1.16}$$

Данная задача на отрезке эквивалентна следующей задаче на прямой:

$$X'' + \lambda X = 0, \quad x \in \mathbb{R}; \tag{1.17}$$

$$X(x + 2\ell) = X(x); \tag{1.18}$$

Задача 1.9. Не решая уравнение, доказать, что собственные значения задачи о кольце вещественны и неотрицательны, причем $\lambda = 0$ является собственным значением, и ему отвечает собственная функция $X = const$.

Доказательство. Предполагая сначала, что собственные значения комплексные, а собственные функции комплекснозначные, умножим обе части уравнения (1.14) на $X^*(x)$ и проинтегрируем по промежутку от $-\ell$ до ℓ. После интегрирования по частям, с учетом краевых условий (1.15)—(1.16), приходим к следующему выражению для λ:

$$\lambda = \frac{\int\limits_{-\ell}^{\ell} |X'(x)|^2 dx}{\int\limits_{-\ell}^{\ell} |X(x)|^2 dx}.$$

Осюда получаем вещественность и неотрицательность собственных значений.

Если $\lambda = 0$, то, как и ранее, $X = const$. Так как постоянная является периодической функцией, то ненулевая константа является собственной функцией данной задачи.

$\square$

Задача 1.10. Найдите собственные значения и собственные функции задачи (1.14)—(1.16).

Известно, что $\lambda = 0$ является собственным значением, и ему отвечает собственная функция $X_0 = 1$.

Пусть теперь $\lambda > 0$. Тогда общее решение уравнения имеет вид:

$$X(x) = A\cos(\sqrt{\lambda}x) + B\sin(\sqrt{\lambda}x),$$

и

$$X'(x) = -\sqrt{\lambda}A\sin(\sqrt{\lambda}x) + \sqrt{\lambda}B\cos(\sqrt{\lambda}x).$$

Из краевого условия (1.15) приходим к уравнению:

$$2B\sin(\sqrt{\lambda}\ell) = 0, \tag{1.19}$$

а из условия (1.16) выводим:

$$2A\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}\ell = 0. \tag{1.20}$$

Если $B = 0$, то из (1.20) получаем уравнение

$$\sin(\sqrt{\lambda}\ell) = 0. \tag{1.21}$$

Отсюда

$$\lambda_k = \left(\frac{\pi k}{\ell}\right)^2, \quad X_k = \cos\frac{\pi k}{\ell}x \quad k \in \mathbb{N}.$$

Если $A = 0$, то из (1.19) снова приходим к уравнению (1.21), следовательно,

$$\lambda_k = \left(\frac{\pi k}{\ell}\right)^2, \quad X_k = \sin\frac{\pi k}{\ell}x \quad k \in \mathbb{N}.$$

Таким образом, в отличие от первой и второй краевой задачи, в задаче о кольце собственные значения $\lambda_k = \left(\dfrac{\pi k}{\ell}\right)^2$ двукратны: каждому такому собственному значению соответствует пара линейно независимых собственных функций: $\cos\dfrac{\pi k}{\ell}x$ и $\sin\dfrac{\pi k}{\ell}x$.

Ответ. Собственные значения задачи о кольце имеют вид

$$\lambda_0 = 0, \quad \lambda_k = \left(\frac{\pi k}{\ell}\right)^2, \quad k \in \mathbb{N},$$

а собственные функции

$$X_0 = 1, \quad X_k(x) = \left\{\cos\frac{\pi k}{\ell}x, \sin\frac{\pi k}{\ell}x\right\}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

1.4 Ортогональность собственных функций

Пусть $\mathfrak{F}$ — линейное пространство над полем вещественных чисел. Напомним определение скалярного произведения.

Определение 1.1. *Отображение* $(,) : \mathfrak{F}\times\mathfrak{F} \longmapsto \mathbb{R}$ *называется скалярным произведением, если оно удовлетворяет следующим аксиомам:*

1. $(f, f) \geqslant 0,$ *причем* $(f, f) = 0 \Leftrightarrow f = 0;$
2. $(\alpha f + \beta g, h) = \alpha(f, h) + \beta(g, h);$
3. $(f, g) = (g, f);$

$\forall f, g, h \in \mathfrak{F}$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Пространство со скалярным произведением называется предгильбертовым. Полное предгильбертово пространство называется гильбертовым.

В каждом предгильбертовом пространстве можно задать норму по правилу:

$$\|f\| = \sqrt{(f, f)}.$$

Примером гильбертова пространства является пространство функций $L_2(0, \ell)$. Оно состоит из измеримых функций, для которых существует интеграл Лебега

$$\int_0^\ell |f(x)|^2 dx < \infty,$$

и скалярное произведение задается формулой

$$(f, g) = \int_0^\ell f(x)g(x)dx.$$

Условие ортогональности двух функций f и g в смысле скалярного произведения в $L_2(0, \ell)$ выглядит следующим образом:

$$(f, g) = 0 \Longleftrightarrow \int_0^\ell f(x)g(x)dx = 0,$$

а квадрат нормы функции вычисляется по правилу

$$\|f\|^2 = \int_0^\ell |f(x)|^2 dx.$$

Оказывается, что для всех рассмотренных задач на собственные значения (первой, второй, со смешанными краевыми условиями, с условиями периодичности) собственные функции, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны в смысле скалярного произведения в пространстве L_2. Справедливость этого утверждения можно проверить непосредственно, вычисляя соответствующие интегралы. На примере первой краевой задачи проведем доказательство, которое годится для всех указанных задач, а также обобщается на многомерный случай.

Задача 1.11. Доказать, что собственные функции первой краевой задачи (1.1)—(1.3), отвечающие различным собственным значениям, ортогональны.

Доказательство. Пусть X_k, X_j — собственные функции, отвечающие различным собственным значениям λ_k, λ_j, $\lambda_k \neq \lambda_j$. Тогда выполняются уравнения

$$\lambda_k X_k = -X_k'' \tag{1.22}$$

$$\lambda_j X_j = -X_j'' \tag{1.23}$$

Умножим уравнение (1.22) на X_j, уравнение (1.23) X_k и проинтегрируем по x от 0 до ℓ. Иными словами, умножим первое уравнение скалярно на X_j, а второе — скалярно на X_k в пространстве $L_2(0, \ell)$. Тогда

$$\lambda_k \int\limits_0^\ell X_k(x) X_j(x) dx = -\int\limits_0^\ell X_k''(x) X_j(x) dx$$

$$\lambda_j \int\limits_0^\ell X_j(x) X_k(x) dx = -\int\limits_0^\ell X_j''(x) X_k(x) dx$$

Вычтем из первой строчки вторую:

$$(\lambda_k - \lambda_j) \int\limits_0^\ell X_k(x) X_j(x) dx = \int\limits_0^\ell X_j''(x) X_k(x) dx - \int\limits_0^\ell X_k''(x) X_j(x) dx$$

По формуле интегрирования по частям

$$\int\limits_0^\ell X_j''(x) X_k(x) dx = X_j'(x) X_k(x) \Big|_0^\ell - \int\limits_0^\ell X_k'(x) X_j'(x) dx = -\int\limits_0^\ell X_k'(x) X_j'(x) dx.$$

Подстановка обратилась в ноль, так как $X_k(0) = 0$, $X_k(\ell) = 0$. Так как для $X_j(x)$ выполняются такие же краевые условия, то

$$\int\limits_0^\ell X_k''(x) X_j(x) dx = -\int\limits_0^\ell X_k'(x) X_j'(x) dx.$$

Окончательно,

$$(\lambda_k - \lambda_j) \int\limits_0^\ell X_k(x) X_j(x) dx = 0.$$

Так как $\lambda_k \neq \lambda_j$, то X_k и X_j ортогональны:

$$(X_k, X_j) = \int\limits_0^\ell X_k(x) X_j(x) dx = 0.$$

$\square$

Если $k = j$, то скалярное произведение превращается в квадрат нормы:

$$(X_k, X_k) = \|X_k\|^2.$$

Задача 1.12. Найти квадрат нормы в $L_2(0, \ell)$ собственных функций первой краевой задачи.

По определению, квадратом нормы X_k называется выражение

$$\|X_k\|^2 = \int\limits_0^\ell |X_k(x)|^2 dx.$$

Для первой краевой задачи на отрезке $[0, \ell]$ собственные функции

$$X_k = \sin \frac{\pi k}{\ell} x, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Вычислим интеграл

$$\|X_k\|^2 = \int\limits_0^\ell \sin^2 \frac{\pi k}{\ell} x dx = \frac{1}{2} \int\limits_0^\ell \left(1 + \cos \frac{2\pi k}{\ell} x\right) = \frac{1}{2} \left(\ell + \frac{\ell}{\pi k} \sin \frac{2\pi k}{\ell} x \Big|_0^\ell\right)$$

Так как подстановка обращается в ноль, то для первой краевой задачи получаем ответ.

Ответ. Квадраты норм $X_k = \sin \dfrac{\pi k}{\ell} x$, $k \in \mathbb{N}$ равны:

$$\|X_k\|^2 = \frac{\ell}{2}.$$

Задача 1.13. Докажите ортогональность собственных функций, отвечающих различным собственным значениям, для второй краевой задачи и задачи о кольце.

Задача 1.14. Найдите квадрат нормы в $L_2(0,\ell)$ собственных функций второй краевой задачи.

Ответ. Квадраты норм $X_0 = 1$ и $X_k = \cos\dfrac{\pi k}{\ell}x$, $k \in \mathbb{N}$ равны:

$$\|X_0\|^2 = \ell; \quad \|X_k\|^2 = \frac{\ell}{2}.$$

Задача 1.15. Найдите квадрат нормы в $L_2(-\ell,\ell)$ собственных функций задачи о кольце длины 2ℓ.

Ответ. Квадраты норм $X_0 = 1$ и $X_k = \left\{cos\dfrac{\pi k}{\ell}x; \sin\dfrac{\pi k}{\ell}x\right\}$, $k \in \mathbb{N}$ равны:

$$\|X_0\|^2 = 2\ell; \quad \|X_k\|^2 = \ell.$$

1.5 Третья краевая задача

Физическая формулировка задачи. Найти собственные поперечные колебания однородной струны, если концы струны закреплены упруго.

В этом случае приходим к третьей краевой задаче:

$$X'' + \lambda X = 0, \quad x \in (0,\ell); \tag{1.24}$$

$$X'(0) - \sigma X(0) = 0; \tag{1.25}$$

$$X'(\ell) + \sigma X(\ell) = 0. \tag{1.26}$$

По физическому смыслу константа $\sigma > 0$.

Задача 1.16. Не решая уравнение, доказать, что собственные значения третьей краевой задачи вещественны и положительны.

Доказательство. Предположим, что $\lambda \in \mathbb{C}$ — некоторое собственное значение, и ему отвечает $X(x) \not\equiv 0$ — вообще говоря, комплекснозначная собственная функция.

Запишем исходное уравнение (1.24) в виде

$$-X'' = \lambda X.$$

Умножив обе части последнего уравнения на $X^*(x)$ и проинтегрировав по x от 0 до ℓ, приходим к равенству:

$$-\int\limits_0^\ell X''(x)X^*(x)dx = \lambda\int\limits_0^\ell |X(x)|^2dx.$$

К левой части применим формулу интегрирования по частям:

$$-\int\limits_0^\ell X''(x)X^*(x)dx = X^*(0)X'(0) - X^*(\ell)X'(\ell) + \int\limits_0^\ell |X'(x)|^2dx.$$

С учетом краевых условий (1.25)—(1.26)

$$-\int\limits_0^\ell X''(x)X^*(x)dx = \sigma|X(\ell)|^2 + \sigma|X(0)|^2 + \int\limits_0^\ell |X'(x)|^2dx.$$

Окончательно,

$$\lambda = \frac{\int\limits_0^\ell |X'(x)|^2dx + \sigma|X(\ell)|^2 + \sigma|X(0)|^2}{\int\limits_0^\ell |X(x)|^2dx}.$$

Очевидно, что собственные значения λ вещественны и неотрицательны.

Предположив, что $\lambda = 0$, получаем, что $X(x) = const$, причем $X(0) = 0$ и $X(\ell) = 0$. Следовательно, $X(x) \equiv 0$, и $\lambda = 0$ не является собственным значением. □

Теперь, не находя собственных функций, докажем их ортогональность.

Задача 1.17. Доказать, что собственные функции, отвечающие различным собственным значениям третьей краевой задачи (1.24)—(1.26), ортогональны в $L_2(0, \ell)$.

Доказательство. Пусть X_k, X_j — собственные функции, отвечающие различным собственным значениям λ_k, λ_j, $\lambda_k \neq \lambda_j$. Так же, как при доказательстве аналогичного свойства для первой краевой задачи, приходим к равенству

$$(\lambda_k - \lambda_j)\int\limits_0^\ell X_k(x)X_j(x)dx = \int\limits_0^\ell X_j''(x)X_k(x)dx - \int\limits_0^\ell X_k''(x)X_j(x)dx.$$

По формуле интегрирования по частям

$$\int\limits_0^\ell X_j''(x)X_k(x)dx = X_j'(x)X_k(x)\Big|_0^\ell - \int\limits_0^\ell X_k'(x)X_j'(x)dx.$$

Вычислим отдельно подстановку

$$X_j'(x)X_k(x)\Big|_0^\ell = X_j'(\ell)X_k(\ell) - X_j'(0)X_k(0) = -\sigma X_j(\ell)X_k(\ell) - \sigma X_j(0)X_k(0).$$

Итак,

$$\int\limits_0^\ell X_j''(x)X_k(x)dx = -\sigma X_j(\ell)X_k(\ell) - \sigma X_j(0)X_k(0) - \int\limits_0^\ell X_k'(x)X_j'(x)dx.$$

Так как выражение в правой части последнего равенства симметрично по j и k, то

$$(\lambda_k - \lambda_j)\int\limits_0^\ell X_k(x)X_j(x)dx = \int\limits_0^\ell X_j''(x)X_k(x)dx - \int\limits_0^\ell X_k''(x)X_j(x)dx = 0.$$

Следовательно, при $\lambda_k \neq \lambda_j$ собственные функции X_k и X_j ортогональны.

$\square$

Задача 1.18. Найти собственные значения и собственные функции третьей краевой задачи (1.24)—(1.26).

Так как уже известно, что $\lambda > 0$, то общее решение уравнения (1.24) имеет вид

$$X(x) = A\cos(\sqrt{\lambda}x) + B\sin(\sqrt{\lambda}x),$$

и его производная равна

$$X'(x) = -\sqrt{\lambda}A\sin(\sqrt{\lambda}x) + \sqrt{\lambda}B\cos(\sqrt{\lambda}x).$$

Из краевого условия в нуле (1.25) приходим к равенству

$$\sqrt{\lambda}B - \sigma A = 0.$$

Отсюда можно выразить A через B:

$$A = \frac{\sqrt{\lambda}B}{\sigma}.$$

Теперь учтем краевое условие в $x = \ell$ (1.25):

$$B(2\sqrt{\lambda}\sigma\cos\sqrt{\lambda}\ell + (\sigma^2 - \lambda)\sin\sqrt{\lambda}\ell) = 0.$$

Константа B не может обратиться в ноль, поэтому собственные значения λ являются решениями трансцендентного уравнения

$$tg\sqrt{\lambda}\ell = \frac{2\sigma\sqrt{\lambda}}{\lambda - \sigma^2}.$$

Пусть $\sqrt{\lambda} = \mu$, тогда μ являются положительными корнями уравнения

$$tg\mu\ell = \frac{2\sigma\mu}{\mu^2 - \sigma^2}. \tag{1.27}$$

Данное уравнение имеет счетное число положительных корней

$$\mu_k, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Действительно, функция $y = tg\mu\ell$ монотонно возрастает на каждом промежутке

$$\mu \in \left(-\frac{\pi}{2\ell} + \frac{\pi n}{\ell}; \frac{\pi}{2\ell} + \frac{\pi n}{\ell}\right) \quad n \in \mathbb{Z}$$

и принимает все вещественные значения, а функция $y = \dfrac{2\sigma\mu}{\mu^2 - \sigma^2}$ при $\mu > \sigma$ монотонно убывает от $+\infty$ до нуля. Итак, существует счетное число собственных значений $\lambda_k = \mu_k^2$, $k \in \mathbb{N}$, и собственные функции имеют вид

$$X_k(x) = B_k\left(\frac{\sqrt{\lambda_k}}{\sigma}\cos\sqrt{\lambda_k}x + \sin\sqrt{\lambda_k}x\right).$$

Положим $B_k = \sigma$, тогда

$$X_k(x) = \sqrt{\lambda_k}\cos\sqrt{\lambda_k}x + \sigma\sin\sqrt{\lambda_k}x.$$

Ответ. Собственные значения третьей краевой задачи (1.24)—(1.26) равны

$$\lambda_k = \mu_k^2, \quad k \in \mathbb{N},$$

где μ_k — положительные корни уравнения (1.27), а собственные функции

$$X_k(x) = \sqrt{\lambda_k} \cos \sqrt{\lambda_k} x + \sigma \sin \sqrt{\lambda_k} x. \tag{1.28}$$

Задача 1.19. Найти квадрат нормы в пространстве $L_2(0, \ell)$ собственных функций (1.28) третьей краевой задачи (1.24)—(1.26).

По определению,

$$\|X_k\|^2 = \int\limits_0^\ell |X_k(x)|^2 dx.$$

Найдем квадрат собственной функции (1.28):

$$X_k^2(x) = \mu_k^2 \cos^2(\mu_k x) + \sigma^2 \sin^2(\mu_k x) + \mu_k \sigma \sin(2\mu_k x).$$

Вычислим интеграл

$$\int\limits_0^\ell \cos^2(\mu_k x) dx = \frac{1}{2} \int\limits_0^\ell (1 + \cos(2\mu_k x)) dx = \frac{1}{2} \left(\ell + \frac{1}{2\mu_k} \sin(2\mu_k \ell) \right).$$

Воспользуемся формулой

$$\sin(2\alpha) = \frac{2tg(\alpha)}{1 + tg^2(\alpha)}.$$

Тогда, с учетом уравнения (1.27),

$$\int\limits_0^\ell \cos^2(\mu_k x) dx = \frac{1}{2} \left(\ell + \frac{1}{\mu_k} \frac{tg(\mu_k \ell)}{1 + tg^2(\mu_k \ell)} \right) = \frac{1}{2} \left(\ell + \frac{2\sigma(\mu_k^2 - \sigma^2)}{(\mu_k^2 + \sigma^2)^2} \right).$$

Аналогично вычисляется интеграл

$$\int\limits_0^\ell \sin^2(\mu_k x) dx = \frac{1}{2} \left(\ell - \frac{2\sigma(\mu_k^2 - \sigma^2)}{(\mu_k^2 + \sigma^2)^2} \right).$$

Теперь найдем интеграл

$$\int\limits_0^\ell \sin(2\mu_k x)dx = \frac{1}{2\mu_k}\left(1 - \cos(2\mu_k \ell)\right).$$

Воспользовавшись формулой

$$\cos(2\alpha) = \frac{1 - tg^2(\alpha)}{1 + tg^2(\alpha)}$$

и учитывая уравнение (1.27), приходим к выражению

$$\int\limits_0^\ell \sin(2\mu_k x)dx = \frac{1}{2\mu_k}\left(1 + \frac{4\mu_k^2\sigma^2 - (\mu_k^2 - \sigma^2)^2}{(\mu_k^2 + \sigma^2)^2}\right) = \frac{4\mu_k\sigma^2}{(\mu_k^2 + \sigma^2)^2}.$$

Окончательно, получаем ответ.

Ответ. Квадрат нормы собственной функции третьей краевой задачи равен:

$$\|X_k\|^2 = \frac{\ell}{2}(\mu^2 + \sigma^2) + \sigma.$$

В следующих задачах на одном конце струны ставится краевое условие первого или второго рода, а на другом — третьего рода.

Задача 1.20. Рассмотрим собственные поперечные колебания однородной струны $x \in [0, \ell]$, если левый конец струны жестко закреплен, а правый закреплен упруго.

1. Выпишите математическую постановку задачи.
2. Докажите, что собственные значения вещественны и положительны.
3. Найдите собственные значения и собственные функции.
4. Вычислите квадраты норм собственных функций.

Ответ. Для задачи

$$X'' + \lambda X = 0, \quad x \in (0, \ell); \tag{1.29}$$

$$X(0) = 0; \tag{1.30}$$

$$X'(\ell) + \sigma X(\ell) = 0. \tag{1.31}$$

собственные значения и собственные функции имеют вид:

$$\lambda_k = \left(\frac{\mu_k}{\ell}\right)^2, \quad X_k = \sin\frac{\mu_k}{\ell}x \quad k \in \mathbb{N},$$

где μ_k — это положительные корни уравнения

$$tg\mu = -\frac{\sigma\mu}{\ell}.$$

Квадрат нормы собственной функции равен

$$\|X_k\|^2 = \frac{\ell}{2}\frac{\ell^2 + \sigma^2\mu_k^2 + \sigma\ell}{\ell^2 + \sigma^2\mu_k^2.}$$

Задача 1.21. Рассмотрим собственные поперечные колебания однородной струны $x \in [0, \ell]$, если левый конец струны свободен, а правый закреплен упруго.

1. Выпишите математическую постановку задачи.
2. Докажите, что собственные значения вещественны и положительны.
3. Найдите собственные значения и собственные функции.
4. Вычислите квадраты норм собственных функций.

Ответ. Для задачи

$$X'' + \lambda X = 0, \quad x \in (0, \ell); \tag{1.32}$$

$$X'(0) = 0; \tag{1.33}$$

$$X'(\ell) + \sigma X(\ell) = 0. \tag{1.34}$$

собственные значения и собственные функции имеют вид:

$$\lambda_k = \left(\frac{\mu_k}{\ell}\right)^2, \quad X_k = \cos\frac{\mu_k}{\ell}x \quad k \in \mathbb{N},$$

где μ_k — это положительные корни уравнения

$$ctg\mu = \frac{\mu}{\sigma\ell}.$$

Квадрат нормы собственной функции равен

$$\|X_k\|^2 = \frac{\ell}{2}\frac{\mu_k^2 + \sigma^2\ell^2 + \sigma\ell}{\sigma^2\ell^2 + \mu_k^2.}$$

1.6 Разные задачи

Задача 1.22. Доказать, что данная задача имеет пустое множество собственных значений λ.

$$X'' = \lambda X' \quad x \in (0,1);$$
$$X(0) = 0;$$
$$X'(1) = 0.$$

Доказательство. Введем новую функцию $Y = X'$. Тогда, по условию, она является решением задачи Коши

$$Y' = \lambda Y;$$
$$Y(1) = 0.$$

Решением этой задачи является $Y \equiv 0$, и по теореме единственности других решений нет.

Следовательно, $X(x)$ является решением задачи Коши:

$$X' = 0;$$
$$X(0) = 0.$$

Данная задача также имеет единственное решение $X \equiv 0$. Следовательно, множество собственных значений пусто. □

Задача 1.23. Доказать, что данная задача имеет пустое множество собственных значений λ.

$$X^{IV} = \lambda X^{II} \quad x \in (0,1);$$
$$X(0) = X^{I}(0) = 0;$$
$$X^{II}(1) = X^{III}(1) = 0.$$

В следующих задачах рассматривается уравнение Эйлера. Оно приводится к уравнению с постоянными коэффициентами с помощью замены

$$x = e^t.$$

Задача 1.24. Найти все собственные значения и собственные функции следующей краевой задачи

$$x^2X^{II} + xX^I + \lambda X = 0 \quad x \in (1, \ell), \ell > 1$$

$$X(1) = 0$$

$$X(\ell) = 0.$$

Задача 1.25. Доказать: собственные значения заполняют луч

$$0 < \lambda < +\infty$$

и найти собственные функции краевой задачи

$$x^2X^{II} + xX^I + \lambda X = 0$$

$$X(x) \quad \text{ограничена при} \quad x \to +0$$

$$X(\ell) = 0.$$

Глава 2

Классификация дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка

2.1 Каноническая форма уравнений

Рассмотрим дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка, линейное относительно вторых производных

$$A(x,y)\,u_{xx} + 2\,B(x,y)\,u_{x,y} + C(x,y)\,u_{yy} = F(x,y,u,u_x,u_y) \qquad (2.1)$$

Здесь $A(x,y)$, $B(x,y)$, $C(x,y)$, $F(x,y,u,u_x,u_y)$ — заданные функции, непрерывные в некоторой области D вместе со вторыми производными; $u = u(x,y)$ — искомая функция двух переменных $u(x,y) \subset C^2(D)$, $D \in \mathbf{R}^2$.

В записи уравнения (2.1) приняты следующие обозначения

$$u_x = \frac{\partial u(x,y)}{\partial x}, \quad u_y = \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}, \quad u_{xx} = \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}, \quad u_{yy} = \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}.$$

Выражение

$$\Delta = B^2(x,y) - A(x,y)\,C(x,y) \qquad (2.2)$$

называется *дискриминантом.*

В зависимости от знака Δ в области D уравнение (2.1) приводится к одной из трех канонических форм.

- Если $\Delta > 0$ в области D, то уравнение приводится к гиперболической канонической форме.
- Если $\Delta = 0$ в области D, то уравнение приводится к параболической канонической форме.
- Если $D < 0$ в области D, то уравнение приводится к эллиптической канонической форме.

Заметим, что одно и то же уравнение в разных областях может быть приведено к разным каноническим формам.

Чтобы привести уравнение (2.1) к канонической форме, нужно отыскать такую невырожденную замену переменных

$$\xi = \varphi_1(x,y),\ \eta = \varphi_2(x,y), \tag{2.3}$$

с помощью которой уравнение (2.1) в новых переменных ξ, η примет каноническую форму. Замена переменных является невырожденной, если якобиан не равен нулю

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x} & \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial x} & \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial y} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{2.4}$$

Для нахождения функций $\varphi_1(x,y)$ и $\varphi_2(x,y)$ составим и решим уравнение в дифференциалах следующего вида

$$A\,dy^2 - 2\,B\,dx\,dy + C\,dx^2 = 0, \tag{2.5}$$

которое называется *характеристическим* для уравнения (2.1). Заметим, что $\Delta = B^2 - A\,C$ является дискриминантом характеристического уравнения.

Если дискриминант $\Delta > 0$, то характеристическое уравнение (2.6) распадается на два вещественных уравнения

$$A\,dy - (B + \sqrt{D})\,dx = 0, \quad A\,dy + (B + \sqrt{D})\,dx = 0, \tag{2.6}$$

интегралы которых выбираем в качестве функций $\varphi_1(x,y)$, $\varphi_2(x,y)$.

Если же дискриминант $D < 0$, то уравнения (2.6) будут комплексными. Решая одно из них, находим общий интеграл, который также будет комплексным, и в качестве функции $\varphi_1(x, y)$ берем его вещественную часть, а в качестве функции $\varphi_2(x, y)$ — мнимую часть.

Если дискриминант $D = 0$, то уравнения (2.6) совпадут и примут вид $A\,dy - B\,dx = 0$. Интеграл одного из них возьмем в качестве функции $\varphi_1(x, y)$, функцию $\varphi_2(x, y)$ можно выбрать произвольно (например, x или y), лишь бы при этом выполнялось условие невырожденности (2.4).

В новых переменных ξ и η уравнение (2.1) примет гиперболическую форму

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} = F(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta), \tag{2.7}$$

параболическая форма уравнения (2.1) имеет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2} = F(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta), \tag{2.8}$$

а эллиптическая форма имеет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2} = F(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta). \tag{2.9}$$

Замечание 2.1. *Полезно вспомнить, как выражаются производные функции $u(x, y)$ по переменным x, y через производные по новым переменным ξ и η. Приведем следующие формулы для производных первого порядка*

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y} \end{aligned} \tag{2.10}$$

и формулы для производных второго порядка

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + 2\,\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\,\frac{\partial \xi}{\partial x}\,\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial u}{\partial \xi}\,\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\,\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}\\
\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 + 2\,\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\,\frac{\partial \xi}{\partial y}\,\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial u}{\partial \xi}\,\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\,\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2}\\
\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\,\frac{\partial \xi}{\partial x}\,\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\,\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial y}\,\frac{\partial \eta}{\partial x}\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\,\frac{\partial \eta}{\partial x}\,\frac{\partial \eta}{\partial y} +\\
&\quad + \frac{\partial u}{\partial \xi}\,\frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\,\frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y} \qquad (2.11)
\end{aligned}$$

Замечание 2.2. *Уравнение (2.6) получено в предположении, что* $A(x,y) \neq 0$. *В случае, когда* $C(x,y) \neq 0$, *уравнение (2.5) распадается на два уравнения*

$$C\,dy - (B + \sqrt{D})\,dx = 0, \quad C\,dy + (B + \sqrt{D})\,dx = 0, \qquad (2.12)$$

Пример 2.1. Привести к канонической форме уравнение

$$x^2\,u_{xx} - y^2\,u_{yy} + 2\,x\,u_x - 2\,y\,u_y = 0 \qquad (2.13)$$

в области $x \neq 0$, $y \neq 0$.

Для этого уравнения (сравните с (2.1))

$$A(x,y) = x^2, \quad B(x,y) \equiv 0, \quad C(x,y) = -y^2. \qquad (2.14)$$

Дискриминант Δ примет вид (2.2)

$$\Delta = x^2\,y^2 > 0 \quad \forall\,x \neq 0, \quad y \neq 0. \qquad (2.15)$$

Значит, в указанной области данное уравнение приводится к гиперболической форме. Составим характеристическое уравнение (2.5):

$$x^2\,dy^2 - y^2\,dx^2 = 0. \qquad (2.16)$$

Уравнение (2.16) распадается на два вещественных уравнения

$$x\,dy - y\,dx = 0, \qquad (2.17)$$

$$x\,dy + y\,dx = 0. \qquad (2.18)$$

Интегралом уравнения (2.18) является функция $x\,y = C_1$, а уравнения (2.17) $\frac{y}{x} = C_2$, где C_1, C_2 — константы. Выберем функции $\varphi_1(x,y)$, $\varphi_2(x,y)$ в виде

$$\varphi_1(x,y) = x\,y, \quad \varphi_2(x,y) = \frac{y}{x}. \tag{2.19}$$

Выполним замену переменных (2.3)

$$\xi = x\,y, \quad \eta = \frac{y}{x}. \tag{2.20}$$

В новых переменных производные имеют вид (см. (2.10))

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial x} = y\,\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{y}{x^2}\frac{\partial u}{\partial \eta}\\
&\frac{\partial u}{\partial y} = x\,\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{1}{x}\,\frac{\partial u}{\partial \eta}\\
&\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = y^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2\,\frac{y^2}{x^2}\,\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{y^2}{x^4}\,\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + 2\,\frac{y}{x^3}\,\frac{\partial u}{\partial \eta}\\
&\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = x^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\,\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{1}{x^2}\,\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}.
\end{aligned}$$

После подстановки в исходное уравнение (2.13) получим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{1}{2\xi}\,\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 \tag{2.21}$$

Уравнение (2.21) является гиперболическим (см.(2.7)).

Пример 2.2. Привести к канонической форме уравнение

$$y^2\,u_{xx} + 2\,x\,y\,u_{xy} + 2\,x^2\,u_{yy} + y\,u_y = 0 \tag{2.22}$$

в области $x \neq 0$, $y \neq 0$.

Выпишем коэффициенты при производных (сравните с (2.1))

$$A(x,y) = y^2, \quad B(x,y) = 2\,x\,y, \quad C(x,y) = 2\,x^2. \tag{2.23}$$

Найдем выражение для дискриминанта Δ (2.2)

$$\Delta = -x^2\,y^2 < 0 \quad \forall\, x \neq 0, \quad y \neq 0. \tag{2.24}$$

В указанной области данное уравнение приводится к эллиптической форме (см.(2.9)). Составим характеристическое уравнение (2.5):

$$y^2\,dy^2 - 2\,x\,y\,dx\,dy + 2\,x^2\,dx^2 = 0. \tag{2.25}$$

Уравнение (2.25) распадается на два комплексных уравнения

$$y\,dy - (1+i)x\,dx = 0, \tag{2.26}$$

$$y\,dy - (1-i)x\,dx = 0. \tag{2.27}$$

Проинтегрировав уравнение (2.26), получим интеграл уравнения

$$(1+i)\,x^2 - y^2 = C,$$

где C — константа. Вещественную часть интеграла возьмем в качестве функции $\varphi_1(x,y)$, а мнимую — $\varphi_2(x,y)$

$$\varphi_1(x,y) = x^2 - y^2, \quad \varphi_2(x,y) = x^2. \tag{2.28}$$

Выполним замену переменных (2.3)

$$\xi = x^2 - y^2, \quad \eta = x^2. \tag{2.29}$$

Найдем выражения частных производных в новых переменных (2.10)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2\,x\,\frac{\partial u}{\partial \xi} + 2\,x\,\frac{\partial u}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -2\,y\,\frac{\partial u}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 4\,x^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 8\,x^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + 4\,x^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + 2\,\frac{\partial u}{\partial \eta} + 2\,\frac{\partial u}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 4\,y^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2\,\frac{\partial u}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -4\,x\,y\,\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 4\,x\,y\,\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}.$$

После подстановки в исходное уравнение (2.22) имеем

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{1}{\xi - \eta}\,\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{1}{2\eta}\,\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0, \tag{2.30}$$

здесь воспользовались тем, что $y^2 = \eta - \xi$.

Уравнение (2.30) является эллиптическим (см.(2.9)).

Теперь приведем задачи для самостоятельного решения.

Привести уравнение к канонической форме

Задача 2.1.

$$u_{xt} + u_{tt} = 0$$

Задача 2.2.

$$u_{xx} - 2\,u_{xy} + u_{yy} = 0$$

Задача 2.3.

$$(1+x^2)\,u_{xx} + (1+y^2)\,u_{yy} + x\,u_x + y\,u_y = 0$$

Задача 2.4.

$$u_{xx} - 2\,\cos\,x\,u_{xy} - \sin^2\,x\,u_{yy} = 0$$

Задача 2.5. Привести уравнение к канонической форме в каждой из областей

$$y\,u_{xx} + u_{yy} = 0.$$

2.2 Основные уравнения математической физики

Уравнением теплопроводности называется уравнение вида

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = a^2\,\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \tag{2.31}$$

Это уравнение является параболическим уравнением. Здесь функция $u(x,t)$ — температура в точке x в момент времени t. Уравнение (2.31) описывает распространение тепла в теле.

Волновым уравнением называется уравнение вида

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \tag{2.32}$$

Это уравнение является гиперболическим уравнением. Здесь функция $u(x, t)$ — отклонение точки струны с координатой x от положения равновесия в момент времени t. Это уравнение (2.32) описывает процесс колебаний в струне.

Уравнением Лапласа называется уравнение вида

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = 0 \tag{2.33}$$

Это уравнение является эллиптическим уравнением.

Глава 3

Постановка краевых задач для уравнения теплопроводности

3.1 Уравнения, описывающие процессы теплопроводности

Рассмотрим стержень с теплоизолированной боковой поверхностью — будем предполагать, что потоки тепла через боковую поверхность отсутствуют. Предположим также, что на любом поперечном сечении стержня температура постоянна. Тогда приходим к математической идеализации стержня как некоторого подмножества вещественной прямой. Так как пространственная переменная x принадлежит $\mathbb{R}^1$: $x \in \mathbb{R}^1$, то рассматриваемая модель одномерна.

Пусть $u(x, t)$ — температура в точке x стержня в момент времени t. Откуда берется знак равенства в уравнении теплопроводности? Что именно приравнивается? Для вывода уравнения теплопроводности к произвольной фиксированной части стержня $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$ применяют закон сохранения энергии. В данном случае в качестве закона сохранения энергии выступает уравнение баланса тепла.

Пусть $Q = Q(x_1, x_2, t_1, t_2)$ — количество тепла, приобретенное выделенным участком стержня за время от t_1 до t_2. Это количество тепла складывается из количества тепла, поступившего через торцы стержня $x = x_1$

и $x = x_2$:

$$Q_1 = Q_1(x_1; t_1, t_2) \quad \text{и} \quad Q_2 = Q_2(x_2; t_1, t_2),$$

а также количества тепла, выделившегося за счет внутренних источников:

$$Q_0 = Q_0(x_1, x_2, t_1, t_2).$$

Таким образом, уравнение баланса тепла имеет вид

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_0.$$

Осталось выразить каждое слагаемое через температуру $u(x,t)$. Если $c(x)$ — удельная теплоемкость вещества, $\rho(x)$ — плотность, $S(x)$ — площадь поперечного сечения стержня, то количество тепла, приобретенное выделенным участком стержня за время от t_1 до t_2, согласно экспериментальному закону, равно

$$Q = \int\limits_{x_1}^{x_2} c(x)\rho(x)S(x)\big[u(x,t_2) - u(x,t_1)\big]\,dx.$$

Пусть $q = q(x,t)$ — плотность теплового потока через нормальное сечение стержня в точке x, то есть количество тепла, протекающее в единицу времени через единичную площадку сечения. Часто плотность теплового потока сокращенно называют "поток тепла". Количество тепла, протекающее через торцы стержня, выражается через поток тепла следующим образом

$$Q_1 = \int\limits_{t_1}^{t_2} S(x_1)q(x_1,t)dt, \quad Q_2 = \int\limits_{t_1}^{t_2} S(x_2)q(x_2,t)dt.$$

Согласно экспериментальному закону Фурье, поток тепла пропорционален градиенту температуры:

$$q = -\kappa\frac{\partial u}{\partial x},$$

где $\kappa > 0$ — коэффициент теплопроводности. Знак "минус"появился из-за того, что тепло течет от более нагретого тела к менее нагретому.

Таким образом, через торцы стержня $x = x_1$ и $x = x_2$ протекает количество тепла

$$Q_1 = -\int\limits_{t_1}^{t_2} S(x_1)\kappa(x_1)\frac{\partial u}{\partial x}(x_1, t)dt,$$

и

$$Q_2 = \int\limits_{t_1}^{t_2} S(x_2)\kappa(x_2)\frac{\partial u}{\partial x}(x_2, t)dt.$$

соответственно.

Поясним различие в знаках, выбранных перед интегралами. Если $\dfrac{\partial u}{\partial x}(x_1, t) > 0$ для всех $t \in [t_1, t_2]$, то тепло вытекает из стержня, следовательно, $Q_1 < 0$. Если же $\dfrac{\partial u}{\partial x}(x_2, t) > 0$, то тепло поступает в стержень, и $Q_2 > 0$.

Количество тепла, выделенное источниками, находится по формуле

$$Q_0 = \int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{x_1}^{x_2} S(x)F(x, t)dxdt,$$

где $F(x, t)$ — плотность внутренних источников тепла, которая считается заданной.

Уравнение баланса тепла в интегральной форме имеет вид

$$\int\limits_{x_1}^{x_2} c(x)\rho(x)S(x)\big[u(x, t_2) - u(x, t_1)\big]dx =$$

$$= \int\limits_{t_1}^{t_2}\left[S(x_2)\kappa(x_2)\frac{\partial u}{\partial x}(x_2, t) - S(x_1)\kappa(x_1)\frac{\partial u}{\partial x}(x_1, t)\right]dt + \int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{x_1}^{x_2} S(x)F(x, t)dxdt.$$

Предположим, что площадь поперечного сечения стержня S постоянна $S = const$, а функция $u(x, t)$ один раз непрерывно дифференцируема по t и дважды непрерывно дифференцируема по x. Тогда, воспользовавшись формулой Ньютона-Лейбница, приведем уравнение теплового баланса к виду

$$\int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{x_1}^{x_2} c(x)\rho(x)\frac{\partial u}{\partial t}dxdt = \int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{x_1}^{x_2}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\kappa(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + F(x,t)\right]dxdt.$$

Продифференцировав последнее равенство по верхним пределам, приходим к уравнению теплопроводности в дифференциальной форме:

$$c(x)\rho(x)\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\kappa(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + F(x,t).$$

Это уравнение с переменными коэффициентами.

В предположениях, что удельная теплоемкость, плотность вещества и коэффициент теплопроводности постоянны: $\kappa, c, \rho = const$, приходим к уравнению теплопроводности с постоянными коэффициентами, которое в дальнейшем будем называть простейшим уравнением теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t). \tag{3.1}$$

Здесь $a^2 = \dfrac{\kappa}{c\rho}$ — коэффициент температуропроводности, $f(x,t) = \dfrac{F(x,t)}{c\rho}$ — удельная плотность внутренних источников тепла.

Если $f(x,t) \neq 0$, то уравнение теплопроводности (3.1) называется неоднородным, если $f(x,t) = 0$, то уравнение называется однородным. Уравнение теплопроводности (3.1) записывают также в виде

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t). \tag{3.2}$$

В уравнении теплопроводности могут появиться дополнительные слагаемые, если, например, рассматривать стержень переменного сечения или стержень, движущийся вдоль оси x.

Задача 3.1. Выведите уравнение теплопроводности, если площадь поперечного сечения стержня зависит от x: $S = S(x) > 0$, а коэффициент теплопроводности, удельная теплоемкость и плотность вещества постоянны:

$$u_t = a^2 u_{xx} + \frac{d}{dx}\big(\ln S(x)\big)u_x + f(x,t). \tag{3.3}$$

Задача 3.2. Покажите, что если стержень движется вдоль оси x со скоростью $v(t)$, то уравнение теплопроводности принимает вид:

$$u_t = a^2 u_{xx} - v(t) u_x + f(x,t). \tag{3.4}$$

Теперь откажемся от предположения теплоизолированности боковой поверхности стержня. Пусть на боковой поверхности происходит конвективный теплообмен с окружающей средой. Тогда поток тепла через боковую поверхность подчиняется закону Ньютона — он пропорционален разности температур тела и окружающей среды:

$$q = \alpha(u - u_0),$$

где q — количество тепла, протекающего в единицу времени через единичную площадку поверхности тела в окружающую среду, α — коэффициент теплообмена, u — температура поверхности тела, u_0 — температура окружающей среды.

Уравнение баланса тепла в этом случае принимает вид

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_0 + Q_3.$$

Здесь сохранены прежние обозначения для количества тепла Q, полученного выделенным участком стержня, количества тепла Q_1 и Q_2, протекающего через торцы, количества тепла Q_0, полученного за счет внутренних источников. Новое слагаемое Q_3 появилось из-за наличия теплообмена на боковой поверхности:

$$Q_3 = -\int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{x_1}^{x_2} P\alpha\big[u(x,t) - u_0(x,t)\big]dxdt.$$

Через P обозначен периметр поперечного сечения стержня.

Появление знака "минус"объясняется так. Предположим, что для всех $t \in [t_1, t_2]$ температура боковой поверхности стержня больше температуры окружающей среды:

$$u(x,t) - u_0(t) > 0.$$

Тогда тепловой поток направлен наружу, и тепло вытекает из стержня, поэтому $Q_3 < 0$.

Окончательно, неоднородное уравнение теплопроводности в случае теплообмена на боковой поверхности принимает вид

$$u_t = a^2 u_{xx} - h(u - u_0(t)) + f(x,t). \tag{3.5}$$

Константу $h = \dfrac{\alpha P}{c\rho S}$ также будем называть коэффициентом теплообмена.

Заметим, что если внутренние источники тепла отсутствуют , и температура окружающей среды равна нулю

$$f(x,t) = 0; \quad u_0(t) = 0,$$

то уравнение теплопроводности с теплообменом на боковой поверхности — однородное:

$$u_t = a^2 u_{xx} - hu. \tag{3.6}$$

Итак, рассмотрены физические постановки задач, приводящие к наличию в уравнении теплопроводности дополнительных слагаемых.

Оказывается, что если в уравнении теплопроводности с постоянными коэффициентами есть младшие члены, то такое уравнение можно свести к простейшему уравнению теплопроводности с помощью замены неизвестной функции.

Задача 3.3. Проверьте, что уравнение с постоянными коэффициентами

$$u_t = a^2 u_{xx} + \ell u_x + mu + f(x,t)$$

заменой

$$u(x,t) = e^{\alpha x + \beta t} v(x,t),$$

где

$$\alpha = -\frac{\ell}{2a^2}, \quad \beta = m - \frac{\ell^2}{4a^2},$$

сводится к простейшему уравнению теплопроводности

$$v_t = a^2 v_{xx} + e^{-\alpha x - \beta t} f(x,t).$$

3.2 Уравнения, описывающие процессы диффузии

Уравнения, которые были получены в предыдущем параграфе, описывают также процессы диффузии.

Как теплопроводность, так и диффузия относятся к процессам переноса. Сущность процессов переноса — стремление системы достигнуть равновесного состояния.

В состоянии теплового равновесия температура во всех точках системы одинакова. При отклонении температуры от равновесного значения возникает движение теплоты в таких направлениях, которые позволяют сделать температуру всех частей системы одинаковыми. Связанный с этим движением перенос тепла и называется теплопроводностью.

Аналогично, если среда неравномерно заполнена газом, то имеет место диффузия его из мест с большей концентрацией в места с меньшей концентрацией. Это же явление наблюдается в растворах, если концентрация растворенного вещества не постоянна.

Пусть газ находится в полой трубке или трубке, заполненной пористой средой. Предположим, что концентрация газа в каждом нормальном сечении трубки постоянна. Через $u(x,t)$ обозначим концентрацию газа в сечении x в момент времени t.

Для выделенного участка трубки $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$ составим уравнение баланса массы.

Пусть $Q = Q(x_1, x_2, t_1, t_2)$ — изменение массы участка трубки за время от t_1 до t_2, произошедшее за счет изменения концентрации.

По определению концентрации,

$$Q = \int\limits_{x_1}^{x_2} c(x)S(x)\big[u(x,t_2) - u(x,t_1)\big]\,dx,$$

где $S(x)$ — площадь поперечного сечения трубки; $c(x)$ — коэффициент пористости, то есть отношение объема пор к полному объему $S(x)dx$. Если трубка полая, то $c(x) = 1$.

Изменение массы Q складывается из массы газа, поступившего через торцы трубки $x = x_1$ и $x = x_2$:

$$Q_1 = \int\limits_{t_1}^{t_2} S(x_1)q(x_1,t)dt \quad \text{и} \quad Q_2 = \int\limits_{t_1}^{t_2} S(x_2)q(x_2,t)dt.$$

а также массы, поступившей за счет внутренних источников:

$$Q_0 = \int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{x_1}^{x_2} S(x)F(x,t)dxdt.$$

Через $q(x,t)$ обозначено количество вещества, диффундирующее в единицу времени через единичную площадку сечения, перпендикулярного оси x.

Аналогом закона Фурье в теории теплопроводности является закон диффузии, который называется законом Нернста:

$$q = -D\frac{\partial u}{\partial x},$$

где D — коэффициент диффузии.

Таким образом, уравнение баланса массы на участке $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$ за время $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$ имеет вид:

$$\int\limits_{x_1}^{x_2} c(x)S(x)\big[u(x,t_2) - u(x,t_1)\big]dx =$$

$$= \int\limits_{t_1}^{t_2}\left[S(x_2)D(x_2)\frac{\partial u}{\partial x}(x_2,t) - S(x_1)D(x_1)\frac{\partial u}{\partial x}(x_1,t)\right]dt + \int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{x_1}^{x_2} S(x)F(x,t)dxdt.$$

Если площадь нормального сечения постоянна, то уравнение диффузии имеет вид:

$$c\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(D\frac{\partial u}{\partial x}\right) + F(x,t).$$

Если коэффициенты диффузии и пористости постоянны, то приходим к уравнению диффузии с постоянными коэффициентами:

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t),$$

где $a^2 = \dfrac{D}{c}$, $f(x,t) = \dfrac{F}{c}$.

Аналогом закона Ньютона конвективного теплообмена является закон диффузии через полунепроницаемую перегородку:

$$q = -\lambda(u - u_0(t)).$$

Проверьте следующие утверждения.

Задача 3.4. Если имеет место диффузия через стенки трубки, то приходим к уравнению вида (3.5).

Задача 3.5. Если диффузия происходит в среде, движущейся вдоль оси x со скоростью $v(t)$, то получаем уравнение (3.4).

В процессах диффузии плотность источников вещества может быть пропорциональна концентрации, причем коэффициент пропорциональности может быть как больше нуля, так и меньше нуля. Например, для неустойчивого газа частицы вещества распадаются, а в процессах цепных реакций размножаются.

Задача 3.6. Если частицы вещества
1) распадаются, причем скорость распада в каждой точке пропорциональна концентрации, то уравнение диффузии имеет вид

$$u_t = Du_{xx} - \beta_1 u;$$

2) размножаются, причем скорость размножения в каждой точке пропорциональна концентрации, то уравнение диффузии имеет вид

$$u_t = Du_{xx} + \beta_2 u.$$

Здесь D — коэффициент диффузии, $\beta_1 > 0$, $\beta_2 > 0$ — коэффициенты распада и размножения соответственно.

К уравнению теплопроводности приводят также некоторые задачи движения вязкой жидкости, а также задачи электродинамики.

3.3 Постановка начально-краевых задач для одномерного уравнения теплопроводности на отрезке

Как правило, для нахождения неизвестной функции $u(x,t)$, удовлетворяющей уравнению теплопроводности, когда пространственная переменная x принадлежит некоторому интервалу $(0,\ell)$, а время t больше нуля, необходимо задавать начальное условие (при $t = 0$) и краевые условия (при $x = 0$, $x = \ell$).

Существует несколько стандартных постановок начально-краевых задач для уравнения теплопроводности на отрезке. Это первая, вторая, третья краевая задача и задача о кольце.

Математическая постановка первой начально-краевой задачи имеет вид:

$$\begin{aligned}
&u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t), \quad x \in (0,\ell), \quad t > 0;\\
&u|_{t=0} = \varphi(x);\\
&u(0,t) = \mu_1(t);\\
&u(\ell,t) = \mu_2(t).
\end{aligned}$$

Здесь $u(x,t)$ подлежит определению, функции $f(x,t)$, $\varphi(x)$, $\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$ считаются известными.

Если речь идет о процессах теплопроводности, то физическая формулировка первой краевой задачи выглядит так: найти распределение температуры $u(x,t)$ в стержне $x \in [0,\ell]$, если по стержню непрерывно распределены источники тепла плотности $f(x,t)$, начальное распределение температуры $\varphi(x)$ задано, на левом конце стержня температура равна $\mu_1(t)$, а на правом — $\mu_2(t)$.

Вторая краевая задача отличается от первой тем, что вместо температуры на концах стержня задаются тепловые потоки:

$$\begin{aligned}
-\kappa u_x(0,t) &= q_1(t);\\
\kappa u_x(\ell,t) &= q_2(t).
\end{aligned}$$

Так как коэффициент теплопроводности κ и величины потоков $q_1(t)$, $q_2(t)$ читаются известными, то задание потоков равносильно заданию значений первых производных функции $u(x,t)$ по переменной x на концах стержня.

Полностью математическая постановка второй начально-краевой задачи выглядит так:

$$
\begin{aligned}
&u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t), \quad x \in (0,\ell), \quad t > 0;\\
&u|_{t=0} = \varphi(x);\\
&u_x(0,t) = \nu_1(t);\\
&u_x(\ell,t) = \nu_2(t).
\end{aligned}
$$

В частном случае однородных краевых условий, когда потоки на концах стержня равны нулю, говорят, что концы стержня теплоизолированы:

$$
\begin{aligned}
&u_x(0,t) = 0;\\
&u_x(\ell,t) = 0.
\end{aligned}
$$

Если на концах стержня происходит конвективный теплообмен по закону Ньютона со средой, температура которой задана, то соответствующие краевые условия называются краевыми условиями третьего рода. Третья краевая задача имеет вид

$$
\begin{aligned}
&u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t), \quad x \in (0,\ell), \quad t > 0;\\
&u|_{t=0} = \varphi(x);\\
&u_x(0,t) = \lambda(u(0,t) - \vartheta_1(t));\\
&u_x(\ell,t) = -\lambda(u(\ell,t) - \vartheta_2(t));
\end{aligned}
$$

Здесь $\vartheta_1(t)$ и $\vartheta_1(t)$ — значения температуры окружающей среды у концов стержня, $\lambda = \dfrac{\alpha}{\kappa}$, где α — коэффициент теплообмена, κ — коэффициент теплопроводности.

В частном случае, когда температура окружающей среды равна нулю, приходим к однородным краевым условиям третьего рода.

$$u_x(0,t) = \lambda u(0,t);$$

$$u_x(\ell,t) = -\lambda u(\ell,t).$$

Возможны также постановки задач со смешанными краевыми условиями. Например, на левом конце стержня задана температура, а на правом тепловой поток.

Наконец, поставим задачу о нагревании тонкого однородного кольца с теплоизолированной боковой поверхностью, если по стержню непрерывно распределены источники тепла плотности $f(x,t)$, начальное распределение температуры задано и равно $\varphi(x)$. Координата $x \in [-\ell, \ell]$ — это длина дуги кольца.

Условие совпадения (отождествления) точек $x = -\ell$ и $x = \ell$ формулируется так: в этих точках совпадают значения температуры и тепловых потоков.

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t), \quad x \in (-\ell, \ell), \quad t > 0;$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x);$$

$$u(-\ell,t) = u(\ell,t);$$

$$u_x(-\ell,t) = u_x(\ell,t).$$

Постановку задачи о кольце можно записать по-другому — как задачу на прямой $x \in \mathbb{R}$ с условием 2ℓ-периодичности.

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0;$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x);$$

$$u(x + 2\ell, t) = u(x,t).$$

Функции $f(x,t)$ и $\varphi(x)$ также предполагаются 2ℓ-периодическими по переменной x.

Все рассмотренные выше задачи могут описывать также процессы диффузии, в предположении, что поверхностями равной концентрации в каждый момент времени t являются плоскости, перпендикулярные оси x. Краевые условия первого рода означают, что на граничных плоскостях задана концентрация диффундирующего вещества, второго рода — задан поток. Если поток равен нулю, то граничные плоскости непроницаемы. Краевые условия третьего рода говорят о том, что граничные плоскости являются полунепроницаемыми, причем диффузия через эти плоскости происходит по закону, подобному закону Ньютона конвективного теплообмена.

Для уравнения теплопроводности возможны также постановки краевых задач без начальных условий.

Пусть $f(x,t)$ — ограниченная функция:

$$|f(x,t)| \leqslant M.$$

Тогда можно разыскивать ограниченные решения уравнения теплопроводности:

$$\begin{aligned}
&u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t), \quad x \in (0,\ell), \quad t \in \mathbb{R};\\
&|u(x,t)| \leqslant M,\\
&u(0,t) = 0; \quad u(\ell,t) = 0.
\end{aligned}$$

Если t меняется на всей вещественной оси, то роль начального условия может играть условие периодичности по времени. Предположим, что $f(x,t)$ — периодическая по времени функция:

$$f(x,t+T) = f(x,t).$$

Поставим задачу отыскания решения уравнения теплопроводности, удовлетворяющего условию периодичности по времени с тем же периодом, а также однородным краевым условиям первого рода:

$$\begin{aligned}
&u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t), \quad x \in (0,\ell), \quad t \in \mathbb{R};\\
&u(x,t+T) = u(x,t),\\
&u(0,t) = 0; \quad u(\ell,t) = 0.
\end{aligned}$$

Если предположить, что плотность внутренних источников тепла

$$f = f(x)$$

не зависит от времени , то естественно разыскивать стационарное распределение температуры $u = u(x)$. Математическая постановка стационарной первой краевой задачи имеет вид:

$$a^2 u''(x) + f(x) = 0, \quad x \in (0, \ell);$$
$$u(0) = 0; \quad u(\ell) = 0.$$

Заметим, что отыскание стационарных решений уравнения теплопроводности приводит к решению одномерного уравнения Пуассона:

$$-u''(x) = g(x).$$

3.4 Теорема единственности классического решения

Рассмотрим первую краевую задачу для уравнения теплопроводности

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t), \quad x \in (0, \ell), \quad t > 0;$$
$$u|_{t=0} = \varphi(x);$$
$$u(0,t) = \mu_1(t);$$
$$u(\ell,t) = \mu_2(t).$$

Пусть $T > 0$ — произвольное число.

Определение 3.1. *Функция $u(x,t)$, дважды непрерывно дифференцируемая по x и один раз непрерывно дифференцируемая по t в области $(0,\ell) \times (0,T)$*

$$u \in C^{2,1}_{x,t}\big((0,\ell) \times (0,T)\big)$$

и непрерывная вплоть до границы этой области

$$u \in C([0,\ell] \times [0,T]) \tag{3.7}$$

называется классическим решением первой начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности, если она удовлетворяет уравнению при $(x,t) \in (0,\ell) \times (0,T)$*, начальному условию при* $t = 0$*,* $x \in [0,\ell]$ *и краевым условиям при всех* $t \in [0,T]$*.*

Так как в краевые условия второго и третьего рода входят производные по x, то определение классического решения второй и третьей краевой задачи отличается тем, что требование (3.7) заменяется на

$$u \in C^{1,0}_{x,t}([0,\ell] \times [0,T]). \tag{3.8}$$

Сформулируем и докажем теорему единственности решения первой начально-краевой задачи.

Теорема 1. *Не может существовать более одного решения первой начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности.*

Доказательство. Предположим, что существуют два решения поставленной задачи: $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$. Тогда их разность

$$v(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$$

удовлетворяет однородному уравнению, нулевым начальным и краевым условиям:

$$v_t = a^2 v_{xx}, \quad x \in (0,\ell), \quad t > 0;$$

$$v|_{t=0} = 0;$$

$$v(0,t) = 0, \quad v(\ell,t) = 0.$$

Очевидно, что $v(x,t) \equiv 0$ является решением этой задачи. Докажем, что других решений нет.

Умножим обе части уравнения на $v(x,t)$ и проинтегрируем по x от 0 до ℓ:

$$\int_0^\ell v_t(x,t)v(x,t)dx = a^2 \int_0^\ell v_{xx}(x,t)v(x,t)dx.$$

Перепишем последнее равенство

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int\limits_0^\ell v^2(x,t)dx = a^2\int\limits_0^\ell v(x,t)dv_x(x,t).$$

Применим формулу интегрирования по частям:

$$\int\limits_0^\ell v(x,t)dv_x(x,t) = v(x,t)v_x(x,t)\Big|_0^\ell - \int\limits_0^\ell v_x^2(x,t)dx.$$

В силу краевых условий подстановка обращается в ноль.

Таким образом, интегральное тождество принимает вид:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int\limits_0^\ell v^2(x,t)dx = -a^2\int\limits_0^\ell v_x^2(x,t)dx. \tag{3.9}$$

Обозначим

$$z(t) = \int\limits_0^\ell v^2(x,t)dx = \|v(\cdot,t)\|^2_{L_2(0,\ell)}.$$

Так как

$$a^2\int\limits_0^\ell v_x^2(x,t)dx \geqslant 0,$$

то из равенства (3.9) следует, что производная функции $z(t)$ неположительна:

$$z'(t) \leqslant 0.$$

Следовательно, $z(t)$ — невозрастающая функция и

$$z(t) \leqslant z(0) \quad \forall t \geqslant 0.$$

Из начального условия вытекает, что

$$z(0) = \int\limits_0^\ell v^2(x,0)dx = 0.$$

Поэтому, с учетом неотрицательности $z(t)$, выполняется двойное неравенство

$$0 \leqslant z(t) \leqslant 0,$$

из которого следует, что $z(t) \equiv 0$, то есть

$$\int_0^\ell v^2(x,t)dx \equiv 0.$$

Так как подинтегральная функция неотрицательна, то $v(x,t) = 0$ для почти всех $x \in [0,\ell]$. В силу непрерывности $v(x,t)$

$$v(x,t) \equiv 0.$$

$\square$

Задача 3.7. Докажите теорему единственности классического решения второй краевой задачи.

Задача 3.8. Докажите теорему единственности классического решения третьей краевой задачи.

Задача 3.9. Определите классическое решение задачи о кольце и докажите теорему единственности для этой задачи.

3.5 Решение простейших задач для уравнения теплопроводности

При решении следующей задачи существенную роль играет физическая трактовка краевых условий.

Задача 3.10. Рассмотрим стержень с теплоизолированной боковой поверхностью в отсутствие источников тепла. Пусть в начальный момент времени стержень равномерно нагрет:

$$u|_{t=0} = T = const.$$

Сформулируйте математические и физические постановки первой, второй, третьей краевой задачи и задачи о кольце, для которых температура стержня останется постоянной во все моменты времени:

$$u(x,t) \equiv T.$$

В простейших случаях решение начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности можно угадать. Согласно доказанным теоремам единственности, других решений быть не может.

Общих рецептов подбора решений, удовлетворяющих данным условиям, не существует. Можно попытаться разыскивать решение в виде функции, зависящей только от одной переменной

$$u = u(t) \quad \text{или} \quad u = u(x).$$

Задача 3.11. Найдите решение первой краевой задачи

$$\begin{aligned}
&u_t = a^2 u_{xx} + A\cos t, \quad x \in (0,\ell), \quad t > 0;\\
&u|_{t=0} = 0;\\
&u(0,t) = A\sin t;\\
&u(\ell,t) = A\sin t.
\end{aligned}$$

Как можно изменить краевые условия, чтобы вид решения остался неизменным?

Задача 3.12. Найдите решение второй краевой задачи

$$\begin{aligned}
&u_t = a^2 u_{xx} + f, \quad x \in (0,\ell), \quad t > 0;\\
&u|_{t=0} = \varphi;\\
&u_x(0,t) = 0;\\
&u_x(\ell,t) = 0
\end{aligned}$$

с постоянными f и φ. Дайте физическую трактовку решения. Для каких еще краевых условий решение будет иметь тот же вид?

Задача 3.13. Найдите решение третьей краевой задачи

$$u_t = a^2 u_{xx} + 3, \quad x \in (0, \ell), \quad t > 0;$$

$$u|_{t=0} = 0;$$

$$u_x(0, t) = \lambda(u(0, t) - 3t);$$

$$u_x(\ell, t) = -\lambda(u(\ell, t) - 3t);$$

Как можно изменить краевые условия, чтобы вид решения остался неизменным?

Задача 3.14. Найдите решение задачи о кольце

$$u_t = a^2 u_{xx} + Be^{-t}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0;$$

$$u|_{t=0} = 0;$$

$$u(x + 2\pi, t) = u(x, t).$$

Для каких еще краевых условий решение будет иметь тот же вид?

Дайте физические формулировки и найдите решения следующих задач для уравнения теплопроводности.

Задача 3.15.

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad x \in (0, 1), \quad t > 0;$$

$$u|_{t=0} = 3x + 1;$$

$$u(0, t) = 1;$$

$$u(1, t) = 4$$

Задача 3.16.

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad x \in (0, 1), \quad t > 0;$$

$$u|_{t=0} = x + 2;$$

$$u_x(0, t) = 1;$$

$$u(1, t) = 3$$

Задача 3.17.

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad x \in (0,1), \quad t > 0;$$
$$u|_{t=0} = x + 2;$$
$$u(0,t) = 2;$$
$$u_x(1,t) = 1$$

Задача 3.18.

$$u_t = u_{xx} - 6, \quad x \in (0,2), \quad t > 0;$$
$$u|_{t=0} = 3x^2 + 1;$$
$$u(0,t) = 1;$$
$$u_x(2,t) = 12$$

Задача 3.19.

$$u_t = u_{xx} - 6, \quad x \in (0,1), \quad t > 0;$$
$$u|_{t=0} = 3x^2 + 1;$$
$$u_x(0,t) = 0;$$
$$u(1,t) = 4$$

Глава 4

Уравнение теплопроводности в пространстве тригонометрических многочленов

Рассматривается начально-краевая задача для уравнения теплопроводности с однородными краевыми условиями в случае, когда неоднородность в уравнении, а также начальное условие представляют собой конечную линейную комбинацию собственных функций данной задачи. Тогда уравнение в частных производных можно свести к обыкновенному дифференциальному уравнению в конечномерном фазовом пространстве. Метод, применяемый для решения как однородного, так и неоднородного уравнения, представляет собой конечномерный аналог метода Фурье — одного из основных методов решения уравнений в частных производных.

4.1 Обыкновенное дифференциальное уравнение в $\mathbb{R}^m$

Предположим, что в $\mathbb{R}^m$ введена евклидова структура, $A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ — линейный оператор.

Пусть оператор A — симметрический:

$$(Au, v) = (u, Av) \quad \forall u, v \in \mathbb{R}^m.$$

Через X_k обозначим собственный вектор оператора A, отвечающий собственному значению λ_k:

$$AX_k = \lambda_k X_k.$$

Тогда в $\mathbb{R}^m$ существует ортогональный базис из собственных векторов, и собственные значения вещественны. Если дополнительно предположить, что оператор A неотрицателен:

$$(Av, v) \geqslant 0 \quad \forall v \in \mathbb{R}^m,$$

то собственные значения неотрицательны.

Рассмотрим задачу Коши для линейного уравнения в $\mathbb{R}^m$:

$$v'(t) = -Av(t), \quad v \in \mathbb{R}^m; \tag{4.1}$$

$$v(0) = \varphi. \tag{4.2}$$

Тогда решение этой задачи можно разложить по собственному базису оператора A:

$$v(t) = \sum_{j=1}^{m} C_j(t) X_j, \tag{4.3}$$

где $C_j(t)$ — неизвестные функции.

Вектор начальных значений также разложим по базису

$$\varphi = \sum_{j=1}^{m} \varphi_j X_j. \tag{4.4}$$

Коэффициенты разложения φ_j найдем, пользуясь ортогональностью собственных векторов X_j. Умножим обе части уравнения (4.4) скалярно на X_i:

$$(\varphi, X_i) = \sum_{j=1}^{m} \varphi_j (X_j, X_i) = \varphi_i (X_i, X_i) = \varphi_i \|X_i\|^2.$$

Отсюда

$$\varphi_j = \frac{(\varphi, X_j)}{\|X_j\|^2}. \tag{4.5}$$

Для нахождения неизвестных коэффициентов разложения $C_j(t)$ подставим $v(t)$ (4.3) в уравнение (4.1)

$$\sum_{j=1}^{m} C_j'(t) X_j = -\sum_{j=1}^{m} C_j(t) A X_j = -\sum_{j=1}^{m} C_j(t) \lambda_j X_j$$

и в начальное условие (4.2)

$$\sum_{j=1}^{m} \varphi_j X_j = \sum_{j=1}^{m} C_j(0) X_j.$$

В силу единственности разложения по базису, каждая из функций $C_j(t)$ является решением задачи Коши

$$C_j'(t) = -\lambda_j C_j(t);$$
$$C_j(0) = \varphi_j.$$

Отсюда находим $C_j(t)$:

$$C_j(t) = \varphi_j e^{-\lambda_j t}.$$

Окончательно, решение задачи Коши (4.1)—(4.2) имеет вид

$$v(t) = \sum_{j=1}^{m} \varphi_j e^{-\lambda_j t} X_j, \tag{4.6}$$

где φ_j находятся по формулам (4.5).

Заметим, что вектор-функции $\left\{e^{-\lambda_j t} X_j\right\}_{j=1}^{m}$ образуют фундаментальную систему решений уравнения (4.1).

4.2 Конечномерная модель для однородного уравнения теплопроводности

Через E^m обозначим множество тригонометрических многочленов вида

$$p(x) = \frac{c_0}{2} + \sum_{k=1}^{N} c_k \cos(kx) + d_k \sin(kx) \tag{4.7}$$

с вещественными коэффициентами $c_k, d_k \in \mathbb{R}$.

Зададим в E^m скалярное произведение по формуле

$$(p, q) = \int_{-\pi}^{\pi} p(x) q(x) dx. \tag{4.8}$$

Тогда E^m превращается в евклидово пространство.

Ортогональный базис в этом пространстве образуют тригонометрические многочлены

$$X_0 = 1, \quad X_k = \{\cos(kx); \sin(kx)\}, \quad 1 \leqslant k \leqslant N.$$

Следовательно, E^m — конечномерное пространство размерности

$$m = 2N + 1.$$

Подчеркнем, что в отличие от конечномерного числового пространства $\mathbb{R}^m$ пространство E^m является конечномерным функциональным пространством — его элементами являются функции!

Пусть $A : E^m \to E^m$ — линейный дифференциальный оператор, действующий по правилу

$$Ap(x) = -\frac{d^2p}{dx^2}. \tag{4.9}$$

Убедимся в том, что A симметричен. Для этого преобразуем скалярное произведение

$$(Ap, q) = -\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{d^2p}{dx^2} q(x) dx = -\frac{dp}{dx} q(x) \Big|_{-\pi}^{\pi} + \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{dp}{dx}\frac{dq}{dx} dx.$$

Так как тригонометрические многочлены $p(x)$ и $q(x)$ 2π-периодичны, то подстановка пропадает, и

$$(Ap, q) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{dp}{dx}\frac{dq}{dx} dx.$$

Следовательно,

$$(Ap, q) = (Aq, p).$$

Оператор A неотрицателен, так как

$$(Ap, p) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{dp}{dx}\right)^2 dx \geqslant 0.$$

Поставим задачу нахождения собственных значений λ_k и собственных векторов X_k оператора A:

$$AX_k = \lambda_k X_k, \quad X_k \neq 0, \quad X_k \in E^m.$$

Учитывая определение оператора A, данную задачу в пространстве тригонометрических многочленов E^m перепишем в виде:

$$X_k'' + \lambda_k X_k = 0;$$

$$X_k(x + 2\pi) = X_k(x), \quad X_k \in E^m.$$

Собственные значения и собственные функции находятся по формулам

$$\lambda_0 = 0, \quad X_0 = 1, \quad \lambda_k = k^2, \quad X_k = \{\cos(kx); \sin(kx)\}, \quad 1 \leqslant k \leqslant N. \tag{4.10}$$

Теперь рассмотрим уравнение теплопроводности на окружности:

$$u_t = u_{xx}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0; \tag{4.11}$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x); \tag{4.12}$$

$$u(x + 2\pi, t) = u(x, t), \tag{4.13}$$

Пусть начальная функция φ принадлежит пространству E^m. Это означает, что она представляет собой тригонометрический полином вида

$$\varphi(x) = \frac{c_0}{2} + \sum_{k=1}^{N} c_k \cos(kx) + d_k \sin(kx). \tag{4.14}$$

Будем разыскивать решение задачи о кольце $u(x, t)$, принадлежащее при каждом фиксированном t пространству E^m. Если такое решение будет найдено, то, в силу доказанной теоремы единственности, можно утверждать, что других решений у задачи (4.11)—(4.13) нет.

Покажем, что рассматриваемую начально-краевую задачу для уравнения в частных производных можно свести к обыкновенному дифференциальному уравнению в пространстве E^m.

Функцию двух переменных $u(x, t)$ можно рассматривать как функцию одной переменной t со значениями в пространстве E^m:

$$u(x, t) = v(t); \quad v(t) \in E^m.$$

Тогда частная производная функции $u(x, t)$ по переменной t — это обычная производная функции $v(t)$ по t:

$$u_t(x, t) = \frac{dv}{dt}.$$

По определению оператора A,

$$Av(t) = -\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}.$$

Следовательно, задача о кольце (4.11)—(4.13) сводится к задаче Коши в пространстве E^m:

$$v'(t) = -Av(t), \quad v \in E^m; \tag{4.15}$$

$$v(0) = \varphi, \tag{4.16}$$

где $\varphi \in E^m$ — заданная функция.

Ранее было показано, что решение задачи (4.15)—(4.16) находится по формуле

$$v(t) = \sum_{j=1}^{m} \varphi_j e^{-\lambda_j t} X_j,$$

Для решения уравнения в частных производных эта формула принимает вид:

$$u(x,t) = \sum_{j=1}^{m} \varphi_j e^{-\lambda_j t} X_j(x). \tag{4.17}$$

Так как начальная функция уже разложена по базису $\{X_j\}_{j=1}^m$, то коэффициенты φ_j известны.

В явном виде решение уравнения теплопроводности на окружности будет выписано в следующем параграфе.

4.3 Однородное уравнение в пространстве тригонометрических многочленов

Пример 4.1. *Найдем решение задачи о кольце для однородного уравнения теплопроводности в случае, когда начальная функция представляет* *собой конечную линейную комбинацию собственных функций:*

$$
\begin{aligned}
&u_t = a^2 u_{xx}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0;\\
&u|_{t=0} = \frac{c_0}{2} + \sum_{k=1}^{N} c_k \cos(kx) + d_k \sin(kx);\\
&u(x + 2\pi, t) = u(x, t).
\end{aligned}
$$

Коэффициенты c_k, d_k *заданы.*

Так как собственные значения и собственные функции данной задачи известны (4.10), роль коэффициентов φ_j играют c_0, c_k, d_k, $1 \leqslant k \leqslant N$, то, согласно (4.17), решение имеет вид

$$
u(x, t) = \frac{c_0}{2} + \sum_{k=1}^{N} (c_k \cos(kx) + d_k \sin(kx)) e^{-k^2 t}
$$

и представляет собой тригонометрический многочлен по x с коэффициентами, зависящими от t.

В данном случае можно было угадать решение задачи и воспользоваться теоремой единственности.

Пример 4.2. *Найдем решение задачи*

$$
\begin{aligned}
&u_t = a^2 u_{xx}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0;\\
&u|_{t=0} = 2\cos(x) + 3\sin(4x) + 5;\\
&u(x + 2\pi, t) = u(x, t).
\end{aligned}
$$

Так как начальная функция является конечной линейной комбинацией собственных функций данной задачи, то решение состоит из конечного числа слагаемых и имеет вид

$$
u(x, t) = 2\cos(x) e^{-t} + 3\sin(4x) e^{-16t} + 5.
$$

Аналогично рассматриваются задачи с другими краевыми условиями.

Задача 4.1. Найдите решение первой краевой задачи

$$u_t = a^2 u_{xx} \quad x \in (0, \ell), \quad t > 0;$$
$$u|_{t=0} = \sum_{k=1}^{N} d_k \sin\left(\frac{\pi k}{\ell} x\right);$$
$$u(0, t) = 0; \quad u(\ell, t) = 0.$$

Ответ.

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{N} d_k \sin\left(\frac{\pi k}{\ell} x\right) e^{-\left(\frac{\pi k}{\ell}\right)^2 t}.$$

Задача 4.2. Найдите решение второй краевой задачи

$$u_t = a^2 u_{xx} \quad x \in (0, \ell), \quad t > 0;$$
$$u|_{t=0} = \frac{c_0}{2} + \sum_{k=1}^{N} c_k \cos\left(\frac{\pi k}{\ell} x\right);$$
$$u_x(0, t) = 0; \quad u_x(\ell, t) = 0.$$

Ответ.

$$u(x, t) = \frac{c_0}{2} + \sum_{k=1}^{N} c_k \cos\left(\frac{\pi k}{\ell} x\right) e^{-\left(\frac{\pi k}{\ell}\right)^2 t}.$$

Найдите решения следующих задач.

Задача 4.3.

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0;$$
$$u|_{t=0} = 4 + 5\cos(2x) + 6\sin(3x);$$
$$u(x + 2\pi, t) = u(x, t).$$

Задача 4.4.

$$
\begin{aligned}
&u_t = a^2 u_{xx}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0;\\
&u|_{t=0} = 7 + 9\cos\left(\frac{5\pi}{\ell}x\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{\ell}x\right);\\
&u(x + 2\ell, t) = u(x, t).
\end{aligned}
$$

Задача 4.5.

$$
\begin{aligned}
&u_t = a^2 u_{xx} \quad x \in (0, 1), \quad t > 0;\\
&u|_{t=0} = 3\sin(2\pi x);\\
&u(0, t) = 0; \quad u(1, t) = 0.
\end{aligned}
$$

Задача 4.6.

$$
\begin{aligned}
&u_t = a^2 u_{xx} \quad x \in (0, 3), \quad t > 0;\\
&u|_{t=0} = 1 + 5\cos\left(\frac{4\pi}{3}x\right);\\
&u_x(0, t) = 0; \quad u_x(3, t) = 0.
\end{aligned}
$$

Задача 4.7.

$$
\begin{aligned}
&u_t = a^2 u_{xx} \quad x \in (0, 2), \quad t > 0;\\
&u|_{t=0} = 6\cos\left(\frac{\pi}{4}x\right) + 10\cos\left(\frac{3\pi}{4}x\right);\\
&u_x(0, t) = 0; \quad u(2, t) = 0.
\end{aligned}
$$

Задача 4.8.

$$
\begin{aligned}
&u_t = a^2 u_{xx} \quad x \in (0, 1), \quad t > 0;\\
&u|_{t=0} = 3\sin(5\pi x) + 4\sin(7\pi x);\\
&u(0, t) = 0; \quad u_x(1, t) = 0.
\end{aligned}
$$

Задача 4.9. Найдите распределение температуры в стержне $x \in [0, 1]$ с теплоизолированной боковой поверхностью, если на концах стержня поддерживается температура, равная нулю, а начальная температура равна

$$u|_{t=0} = 4\sin(2\pi x)\cos(\pi x).$$

Задача 4.10. Найдите распределение температуры в стержне $x \in [0,1]$ с теплоизолированной боковой поверхностью, если концы стержня теплоизолированы, а начальная температура равна

$$u|_{t=0} = 2\cos(3\pi x)\cos(\pi x).$$

Задача 4.11. Найдите распределение температуры в стержне $x \in [0,2]$ с теплоизолированной боковой поверхностью, если левый конец стержня теплоизолирован,на правом конце поддерживается температура, равная нулю, а начальная температура равна

$$u|_{t=0} = 2\cos(\frac{\pi x}{2})\cos(\frac{\pi x}{4}).$$

Задача 4.12. Найдите распределение температуры в стержне $x \in [0,1/2]$ с теплоизолированной боковой поверхностью, если на левом конце поддерживается температура, равная нулю, правый конец стержня теплоизолирован, а начальная температура равна

$$u|_{t=0} = 4\sin(3\pi x)\cos(2\pi x).$$

4.4 Неоднородное уравнение в $\mathbb{R}^m$

Предположим, что в $\mathbb{R}^m$ введена евклидова структура, $A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ — линейный оператор. Пусть A является симметрическим и неотрицательно определенным.

Рассмотрим задачу Коши для линейного неоднородного уравнения в $\mathbb{R}^m$:

$$v'(t) = -Av(t) + f(t), \quad v \in \mathbb{R}^m; \tag{4.18}$$

$$v(0) = 0. \tag{4.19}$$

Применим метод вариации произвольных постоянных. Решение неоднородного уравнения будем разыскивать в том же виде, что решение однородного уравнения (4.6), но с коэффициентами, зависящими от времени

$$v(t) = \sum_{j=1}^{m} C_j(t)e^{-\lambda_j t}X_j, \tag{4.20}$$

где $C_j(t)$ — неизвестные функции, λ_j — собственные значения оператора A, X_j — собственные векторы.

Вектор-функцию $f(t)$ также разложим по собственным векторам:

$$f(t) = \sum_{j=1}^{m} f_j(t) e^{-\lambda_j t} X_j, \tag{4.21}$$

где

$$f_j(t) = \frac{(f(t), X_j)}{\|X_j\|^2}.$$

Подставим (4.20), (4.21) в уравнение и в начальное условие.

Так как вектор-функции $\left\{e^{-\lambda_j t} X_j\right\}_{j=1}^{m}$ образуют фундаментальную систему решений однородного уравнения (4.1), то (4.18) принимает вид

$$\sum_{j=1}^{m} C_j'(t) e^{-\lambda_j t} X_j = \sum_{j=1}^{m} f_j(t) X_j.$$

После подстановки в начальное условие (4.19)

$$\sum_{j=1}^{m} C_j(0) X_j = 0.$$

В силу единственности разложения по базису, каждая из функций $C_j(t)$ является решением задачи Коши

$$C_j'(t) = e^{\lambda_j t} f_j(t);$$

$$C_j(0) = 0.$$

Отсюда находим $C_j(t)$:

$$C_j(t) = \int\limits_0^t e^{\lambda_j \tau} f_j(\tau) d\tau. \tag{4.22}$$

Окончательно, решение задачи Коши (4.18)—(4.19) имеет вид

$$v(t) = \sum_{j=1}^{m} C_j(t) e^{-\lambda_j t} X_j,$$

где $C_j(t)$ находятся по формулам (4.22).

4.5 Конечномерная модель для неоднородного уравнения теплопроводности

Через E^m по-прежнему будем обозначать евклидово пространство тригонометрических многочленов вида (4.7) со скалярным произведением (4.8). Пусть $A : E^m \to E^m$ — линейный дифференциальный оператор, действующий по правилу (4.9).

Рассмотрим неоднородное уравнение теплопроводности на окружности:

$$u_t = u_{xx} + F(x,t), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0; \tag{4.23}$$

$$u|_{t=0} = 0; \tag{4.24}$$

$$u(x + 2\pi, t) = u(x,t), \tag{4.25}$$

Пусть функция $F(x,t)$ принадлежит пространству E^m. Это означает, что она представляет собой тригонометрический полином вида

$$F(x,t) = \frac{h_0(t)}{2} + \sum_{k=1}^{N} h_k(t)\cos(kx) + g_k(t)\sin(kx). \tag{4.26}$$

Функции двух переменных $u(x,t)$, $F(x,t)$ будем рассматривать как функции одной переменной t со значениями в пространстве E^m:

$$u(x,t) = v(t); \quad v(t) \in E^m; \quad F(x,t) = f(t); \quad f(t) \in E^m.$$

Тогда, как и в случае однородного уравнения, задачу (4.23)—(4.25) можно свести к обыкновенному дифференциальному уравнению в пространстве E^m:

$$v'(t) = -Av(t) + f(t), \quad v \in \mathbb{R}^m; \tag{4.27}$$

$$v(0) = 0. \tag{4.28}$$

Его решение находится по формулам (4.20),(4.22).

Отсюда следует, что решение начально-краевой задачи для уравнения в частных производных имеет вид

$$u(x,t) = \sum_{j=1}^{m} C_j(t) e^{-\lambda_j t} X_j(x). \tag{4.29}$$

Коэффициенты C_j определяются в (4.22).

В явном виде решение неоднородного уравнения теплопроводности на окружности будет выписано в следующем параграфе.

4.6 Неоднородное уравнение в пространстве тригонометрических многочленов

Пример 4.3. *Найдем решение задачи о кольце для неоднородного уравнения теплопроводности с нулевым начальным условием в случае, когда неоднородность представима в виде конечной линейной комбинации собственных функций с известными коэффициентами, зависящими от времени:*

$$u_t = a^2 u_{xx} + \frac{h_0(t)}{2} + \sum_{k=1}^{N} h_k(t)\cos(kx) + g_k(t)\sin(kx), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0;$$

$$u|_{t=0} = 0;$$

$$u(x + 2\pi, t) = u(x, t).$$

Решение $u(x,t)$ имеет вид

$$u(x,t) = \frac{A_0(t)}{2} + \sum_{k=1}^{N} (A_k(t)\cos(kx) + B_k(t)\sin(kx))e^{-k^2 t}$$

с неизвестными коэффициентами $A_k(t)$, $B_k(t)$.

Подставляя $u(x,t)$ в уравнение и в начальное условие и приравнивая коэффициенты при одинаковых собственных функциях, приходим к следующим задачам Коши для нахождения коэффициентов — при $k = 0$:

$$A_0'(t) = f_0(t); \quad A_0(0) = 0;$$

при $1 \leqslant k \leqslant N$:

$$A_k'(t) = e^{k^2 t} f_k(t); \quad A_k(0) = 0;$$

$$B_k'(t) = e^{k^2 t} g_k(t); \quad B_k(0) = 0;$$

Следовательно, решением задачи является конечная сумма

$$u(x,t) = \frac{A_0(t)}{2} + \sum_{k=1}^{N} (A_k(t)\cos(kx) + B_k(t)\sin(kx))e^{-k^2 t},$$

где коэффициенты определяются формулами:

$$A_0(t) = \int\limits_0^t f_0(\tau)d\tau;$$

$$A_k(t) = \int\limits_0^t e^{k^2\tau} f_k(\tau)d\tau; \quad B_k(t) = \int\limits_0^t e^{k^2\tau} g_k(\tau)d\tau \quad 1 \leqslant k \leqslant N.$$

Если рассматривается неоднородное уравнение с ненулевым начальным условием, то удобно разбивать исходную задачу на две: однородное уравнение с ненулевым начальным условием и неоднородное уравнение с нулевым начальным условием.

Пример 4.4. *Найдем решение задачи*

$$u_t = a^2 u_{xx} + e^{-t}\cos(2x) + 3\sin(5x) + 4t, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0;$$

$$u|_{t=0} = 7\cos(x) + 5\sin(2x) + 6;$$

$$u(x + 2\pi, t) = u(x,t).$$

Решение $u(x,t)$ будем разыскивать в виде суммы двух функций

$$u(x,t) = u^{(1)}(x,t) + u^{(2)}(x,t),$$

одна из которых удовлетворяет однородному уравнению с ненулевым начальным условием

$$u_t^{(1)} = u_{xx}^{(1)}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0;$$

$$u^{(1)}|_{t=0} = 7\cos(x) + 5\sin(2x) + 6;$$

$$u^{(1)}(x + 2\pi, t) = u^{(1)}(x,t),$$

а вторая является решением неоднородного уравнения с нулевым начальным условием:

$$u_t^{(2)} = u_{xx}^{(2)} + e^{-t}\cos(2x) + 3\sin(5x) + 4t, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0;$$

$$u^{(2)}|_{t=0} = 0;$$

$$u^{(2)}(x + 2\pi, t) = u^{(2)}(x, t).$$

Решение первой задачи $u^{(1)}(x, t)$ определяется формулой

$$u^{(1)}(x, t) = 7\cos(x)e^{-t} + 5\sin(2x)e^{-4t} + 6.$$

Решение второй задачи $u^{(2)}(x, t)$ будем разыскивать в виде конечной линейной комбинации

$$u^{(2)}(x, t) = A_2(t)\cos(2x)e^{-4t} + B_5(t)\sin(5x)e^{-25t} + \frac{A_0(t)}{2}.$$

Для нахождения неизвестных коэффициентов получаем задачи Коши:

$$A_0'(t) = 8t; \quad A_0(0) = 0;$$

$$A_2'(t) = e^{4t}e^{-t} = e^{3t}; \quad A_2(0) = 0;$$

$$B_5'(t) = 3e^{25t}; \quad B_5(0) = 0;$$

Отсюда

$$A_0(t) = 4t^2; \quad A_2(t) = \frac{1}{3}\left(e^{3t} - 1\right);$$

$$B_5(t) = \frac{3}{25}\left(e^{25t} - 1\right).$$

Тогда

$$u^{(2)}(x, t) = \frac{1}{3}\left(e^{3t} - 1\right)\cos(2x)e^{-4t} + \frac{3}{25}\left(e^{25t} - 1\right)\sin(5x)e^{-25t} + 2t^2.$$

Окончательно, находим решение исходной задачи

$$u(x, t) = 7\cos(x)e^{-t} + 5\sin(2x)e^{-4t} + 6 +$$

$$+\frac{1}{3}\left(e^{-t} - e^{-4t}\right)\cos(2x) + \frac{3}{25}\left(1 - e^{-25t}\right)\sin(5x) + 2t^2.$$

Аналогично рассматриваются задачи с другими краевыми условиями.

Задача 4.13. Найдите решение первой краевой задачи

$$u_t = u_{xx} + \sum_{k=1}^{N} g_k(t) \sin\left(\frac{\pi k}{\ell} x\right); \quad x \in (0, \ell), \quad t > 0;$$

$$u|_{t=0} = 0;$$

$$u(0,t) = 0; \quad u(\ell, t) = 0.$$

Ответ.

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{N} B_k(t) \sin\left(\frac{\pi k}{\ell} x\right) e^{-\left(\frac{\pi k}{\ell}\right)^2 t},$$

где

$$B_k(t) = \int_0^t e^{k^2\tau} g_k(\tau) d\tau \quad 1 \leqslant k \leqslant N.$$

Задача 4.14. Найдите решение второй краевой задачи

$$u_t = u_{xx} + \frac{f_0(t)}{2} + \sum_{k=1}^{N} f_k(t) \cos\left(\frac{\pi k}{\ell} x\right); \quad x \in (0, \ell), \quad t > 0;$$

$$u|_{t=0} = 0$$

$$u_x(0,t) = 0; \quad u_x(\ell, t) = 0.$$

Ответ.

$$u(x,t) = \frac{A_0(t)}{2} + \sum_{k=1}^{N} A_k \cos\left(\frac{\pi k}{\ell} x\right) e^{-\left(\frac{\pi k}{\ell}\right)^2 t}.$$

где

$$A_0(t) = \int_0^t f_0(\tau) d\tau;$$

$$A_k(t) = \int_0^t e^{k^2\tau} f_k(\tau) d\tau; \quad 1 \leqslant k \leqslant N.$$

Дайте словесные формулировки и найдите решения следующих начально-краевых задач.

Задача 4.15.

$$u_t = u_{xx} + t + e^{-2t}\cos(3x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0;$$
$$u|_{t=0} = 3 + 4\cos(x) + 5\sin(2x);$$
$$u(x + 2\pi, t) = u(x, t).$$

Задача 4.16.

$$u_t = u_{xx} + t + e^{-t}\sin(2x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0;$$
$$u|_{t=0} = 1 + 2\cos(3x) + 3\sin(x);$$
$$u(x + 2\pi, t) = u(x, t).$$

Задача 4.17.

$$u_t = u_{xx} + e^{-t}\sin(x) \quad x \in (0, \pi), \quad t > 0;$$
$$u|_{t=0} = 2\sin(3x);$$
$$u(0, t) = 0; \quad u(\pi, t) = 0.$$

Задача 4.18.

$$u_t = u_{xx} + e^{-4t}\cos(2x) \quad x \in (0, \pi), \quad t > 0;$$
$$u|_{t=0} = 2 + 3\cos(4x);$$
$$u_x(0, t) = 0; \quad u_x(\pi, t) = 0.$$

Задача 4.19.

$$u_t = u_{xx} + 5t\cos(3x) \quad x \in (0, \frac{\pi}{2}), \quad t > 0;$$
$$u|_{t=0} = 4\cos(7x);$$
$$u_x(0, t) = 0; \quad u\left(\frac{\pi}{2}, t\right) = 0.$$

Задача 4.20.

$$u_t = u_{xx} + 4t\sin(3x) \quad x \in (0, \frac{\pi}{2}), \quad t > 0;$$

$$u|_{t=0} = 3\sin(x);$$

$$u(0,t) = 0; \quad u_x\left(\frac{\pi}{2}, t\right) = 0.$$

Выпишите математическую постановку и найдите решение следующих задач.

Задача 4.21. Найдите распределение температуры в стержне $x \in [0,1]$ с теплоизолированной боковой поверхностью, если по стержню непрерывно распределены источники плотности $t\sin(2\pi x)$, на концах стержня поддерживается температура, равная нулю, а начальная температура равна

$$u|_{t=0} = 2\sin(3\pi x)\cos(\pi x).$$

Задача 4.22. Найдите распределение температуры в стержне $x \in [0,1]$ с теплоизолированной боковой поверхностью, если по стержню непрерывно распределены источники плотности $t\cos(2\pi x)$ концы стержня теплоизолированы, а начальная температура равна

$$u|_{t=0} = 4\cos(2\pi x)\cos(\pi x).$$

Задача 4.23. Найдите распределение температуры в стержне $x \in [0,1]$ с теплоизолированной боковой поверхностью, если по стержню непрерывно распределены источники плотности

$$4e^{-2t}\cos\left(\frac{3\pi x}{2}\right)\cos(\pi x),$$

левый конец стержня теплоизолирован,на правом конце поддерживается температура, равная нулю, а начальная температура равна

$$u|_{t=0} = 6\cos(7\pi x).$$

Задача 4.24. Найдите распределение температуры в стержне $x \in [0, 1/2]$ с теплоизолированной боковой поверхностью, если по стержню непрерывно распределены источники плотности

$$2e^{-4t}\sin(2\pi x)\cos(\pi x),$$

на левом конце поддерживается температура, равная нулю, правый конец стержня теплоизолирован, а начальная температура равна

$$u|_{t=0} = 8\sin(5\pi x).$$

Глава 5

Метод Фурье для однородного уравнения теплопроводности

Метод Фурье или метод разделения переменных является основным методом решения краевых задач для ограниченных областей.

Одномерное уравнение теплопроводности возникает в задачах о распределении тепла в тонком однородном стержне. Решение уравнения теплопроводности представляет собой функцию $u(x,t)$, дающую зависимость температуры в точке стержня с координатой x от времени t.

Вначале мы рассмотрим задачу о распространении тепла в тонком однородном стержне заданной длины ($0 \leqslant x \leqslant \ell$) в том случае, когда отсутствуют тепловые источники (или стоки). Такая задача описывается однородным уравнением теплопроводности. Если нет теплообмена через боковую поверхность стержня, то процесс описывается следующим уравнением теплопроводности

$$u_t = a^2\, u_{xx}, \quad 0 < x < \ell \tag{5.1}$$

Здесь $u(x,t)$ — температура стержня в точке с координатой x в момент времени t, a^2 — коэффициент температуропроводности.

Если через боковую поверхность осуществляется конвективный теплообмен с окружающей средой по закону Ньютона, то уравнение теплопроводности примет вид

$$u_t = a^2\, u_{xx} - h\,(u - u_0), \tag{5.2}$$

здесь $u_0 = const$ — температура окружающей среды, h — коэффициент теплообмена. Это уравнение теплопроводности с помощью замены переменной $u(x,t) = u_0 + v(x,t)\, e^{-h\,t}$ сводится к обычному уравнению теплопроводности

$$v_t = a^2\, v_{xx}. \tag{5.3}$$

5.1 Задачи на собственные значения для обыкновенных дифференциальных уравнений

Сначала напомним выражения собственных значений и собственных функций наиболее часто встречающихся задач.

Для задачи

$$\begin{cases} X'' + \lambda\, X = 0, \quad x \in [0,\ell] \\ X(0) = 0, \quad X(\ell) = 0 \end{cases} \tag{5.4}$$

собственные значения и собственные функции имеют вид

$$\lambda_k = \frac{\pi^2\, k^2}{\ell^2}, \quad X_k(x) = \sin\left(\frac{\pi\, k}{\ell}\, x\right), \quad k \in \mathbf{N} \tag{5.5}$$

Для задачи

$$\begin{cases} X'' + \lambda\, X = 0, \quad x \in [0,\ell] \\ X'(0) = 0, \quad X'(\ell) = 0 \end{cases} \tag{5.6}$$

собственные значения и собственные функции имеют вид

$$\lambda_0 = 0, \quad \lambda_k = \frac{\pi^2\, k^2}{\ell^2}, \quad k \in \mathbf{N}$$

$$X_0(x) \equiv 1, \quad X_k(x) = \cos\left(\frac{\pi\, k}{\ell}\, x\right), \quad k \in \mathbf{N} \tag{5.7}$$

Для задачи

$$\begin{cases} X'' + \lambda\, X = 0, \quad x \in [0,\ell] \\ X(0) = 0, \quad X'(\ell) = 0 \end{cases} \tag{5.8}$$

собственные значения и собственные функции имеют вид

$$\lambda_k = \frac{\pi^2\,(2\,k-1)^2}{4\,\ell^2}, \quad X_k(x) = \sin\left(\frac{\pi\,(2\,k-1)}{2\ell}\, x\right), \quad k \in \mathbf{N} \tag{5.9}$$

Для задачи

$$\begin{cases} X'' + \lambda\, X = 0, \quad x \in [0, \ell] \\ X'(0) = 0, \quad X(\ell) = 0 \end{cases} \tag{5.10}$$

собственные значения и собственные функции имеют вид

$$\lambda_k = \frac{\pi^2\,(2\,k-1)^2}{4\,\ell^2}, \quad X_k(x) = \cos\left(\frac{\pi\,(2\,k-1)}{2\ell}\,x\right), \quad k \in \mathbf{N} \tag{5.11}$$

Для задачи

$$\begin{cases} X'' + \lambda\, X = 0, \quad x \in [-\ell, \ell] \\ X(-\ell) = X(\ell), \quad X'(-\ell) = X'(\ell) \end{cases} \tag{5.12}$$

собственные значения и собственные функции имеют вид

$$\lambda_0 = 0, \quad \lambda_k = \frac{\pi^2\,k^2}{\ell^2},$$

$$X_0(x) \equiv 1, \quad X_k(x) = \left\{\sin\left(\frac{\pi\,k}{\ell}\,x\right); \cos\left(\frac{\pi\,k}{\ell}\,x\right)\right\}, \quad k \in \mathbf{N} \tag{5.13}$$

Теперь продемонстрируем общую схему метода Фурье для решения уравнения теплопроводности при различных краевых условиях.

5.2 Задача о кольце

Постановка задачи. Найдите распределение температуры в тонком однородном кольце радиуса $\dfrac{\ell}{\pi}$ с теплоизолированной боковой поверхностью, если начальная температура стержня является произвольной функцией $\varphi(x)$.

Будем рассматривать задачу о кольце как задачу о стержне длины 2ℓ с периодическими краевыми условиями:

$$u_t = a^2\,u_{xx}, \quad -\ell \leqslant x \leqslant \ell \tag{5.14}$$

$$u(x, 0) = \varphi(x) \tag{5.15}$$

$$u(-\ell, t) = u(\ell, t) \tag{5.16}$$

$$u_x(-\ell, t) = u_x(\ell, t) \tag{5.17}$$

Решение. Метод Фурье состоит из двух этапов. На первом этапе разыскиваются частные решения уравнения теплопроводности, удовлетворяющие краевым условиям. На втором этапе разыскивается решение, удовлетворяющее начальному условию.

Начнем с первого этапа метода Фурье. Будем разыскивать нетривиальное, т.е. неравное нулю тождественно, частное решение уравнения (5.14), удовлетворяющее краевым условиям (5.16)–(5.17) в виде произведения

$$\tilde{u}(x,t) = X(x)\,T(t). \tag{5.18}$$

Поставим $\tilde{u}(x,t)$ в виде (5.18) в уравнение (5.14). Имеем

$$X(x)\,T'(t) = a^2\,X''(x)\,T(t). \tag{5.19}$$

Разделяя переменные, получим

$$\frac{T'(t)}{a^2\,T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}. \tag{5.20}$$

В этом равенстве слева стоит функция $\dfrac{T'(t)}{a^2\,T(t)}$, зависящая только от t, а справа $\dfrac{X''(x)}{X(x)}$ — функция, зависящая только от x. Тождество (5.20) будет возможно лишь тогда, когда каждая функция является некоторой постоянной. Обозначим эту константу $-\lambda$.

$$\frac{T'(t)}{a^2\,T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda. \tag{5.21}$$

Для функций $T(t)$ и $X(x)$ получаем обыкновенные дифференциальные уравнения первого и второго порядков:

$$T'(t) + \lambda\,a^2\,T(t) = 0, \tag{5.22}$$

$$X''(x) + \lambda\,X(x) = 0. \tag{5.23}$$

Если подставить решение (5.18) в краевые условия (5.16)-(5.17), то получим

$$X(-\ell)\,T(t) = X(\ell)\,T(t), \quad X'(-\ell)\,T(t) = X'(\ell)\,T(t). \tag{5.24}$$

Для любой функции $T(t)$ можно удовлетворить этим равенствам, если

$$X(-\ell) = X(\ell), \quad X'(-\ell) = X'(\ell). \tag{5.25}$$

Таким образом, функция $X(x)$ должна удовлетворять дифференциальному уравнению (5.23) и условиям (5.25). Получаем краевую задачу на собственные значения (см.(5.12))

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda\, X(x) = 0, & x \in (-\ell, \ell) \\ X(-\ell) = X(\ell), & X'(-\ell) = X'(\ell), \end{cases}$$

решение которой дает нам следующие собственные значения (5.13)

$$\lambda_0 = 0, \quad \lambda_k = \left(\frac{\pi\, k}{\ell}\right)^2, \quad k \in \mathbf{N} \tag{5.26}$$

и отвечающие им собственные функции

$$X_0(x) \equiv 1, \quad X_k(x) = \left\{\sin\frac{\pi\, k}{\ell}\, x; \quad \cos\frac{\pi\, k}{\ell}\, x\right\}, \quad k \in \mathbf{N}. \tag{5.27}$$

Еще раз напомним, что в задаче о кольце есть нулевое собственное значение $\lambda_0 = 0$ и ему отвечает постоянная собственная функция $X_0 \equiv 1$.

Теперь найдем функцию $T(t)$, которая должна удовлетворять дифференциальному уравнению (5.22). Разделяя переменные и интегрируя, получим частное решение в виде

$$T(t) = e^{-a^2\,\lambda\, t}, \tag{5.28}$$

здесь $\lambda = \lambda_k$ — собственное значение (5.26).

Таким образом, первый этап метода Фурье заканчивается построением бесконечного набора частных решений исходной краевой задачи следующего вида

$$\begin{aligned} &\tilde{u}_0(x,t) = 1 \\ &\tilde{u}_k(x,t) = \left\{\sin\frac{\pi\, k}{\ell}\, x\, e^{-a^2\left(\frac{\pi\, k}{\ell}\right)^2 t}; \quad \cos\frac{\pi\, k}{\ell}\, x\, e^{-a^2\left(\frac{\pi\, k}{\ell}\right)^2 t}\right\}, k \in \mathbf{N}. \end{aligned} \tag{5.29}$$

Еще раз подчеркнем, что построенные решения удовлетворяют однородному уравнению теплопроводности (5.14) и краевым условиям (5.16)-(5.17).

Этим заканчивается первый этап метода Фурье.

Далее на втором этапе метода построим решение, удовлетворяющее начальному условию (5.15).

По аналогии с обыкновенными дифференциальными уравнениями общее решение будем разыскивать в виде линейной комбинации частных решений. В отличие от обыкновенных дифференциальных уравнений для уравнений с частными производными будем рассматривать линейную комбинацию не конечного, а бесконечного набора частных решений, т.е. ряд следующего вида

$$u(x,t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(B_k \sin\frac{\pi\, k}{\ell}\, x + A_k \cos\frac{\pi\, k}{\ell}\, x \right) e^{-a^2 \left(\frac{\pi\, k}{\ell}\right)^2 t}. \quad (5.30)$$

Неизвестные постоянные A_0, A_k и B_k определим из начального условия (5.15).

При $t = 0$ имеем

$$u(x,0) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(B_k \sin\frac{\pi\, k}{\ell}\, x + A_k \cos\frac{\pi\, k}{\ell}\, x \right). \quad (5.31)$$

Подставляя (5.31) в (5.15), получим

$$\varphi(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(B_k \sin\frac{\pi\, k}{\ell}\, x + A_k \cos\frac{\pi\, k}{\ell}\, x \right). \quad (5.32)$$

Таким образом, B_k, A_k, A_0 — коэффициенты разложения в ряд Фурье функции $\varphi(x)$ на отрезке $[-\ell, \ell]$.

Вспомним, что система собственных функций ортогональна на $[-\ell, \ell]$:

$$\int_{-\ell}^{\ell} \sin\left(\frac{\pi\, k}{\ell}\, x\right) \sin\left(\frac{\pi\, n}{\ell}\, x\right) dx = \begin{cases} 0, & k \neq n \\ \ell, & k = n. \end{cases} \quad (5.33)$$

$$\int_{-\ell}^{\ell} \cos\left(\frac{\pi\, k}{\ell}\, x\right) \cos\left(\frac{\pi\, n}{\ell}\, x\right) dx = \begin{cases} 0, & k \neq n \\ \ell, & k = n. \end{cases} \quad (5.34)$$

Действительно, при $k = n$ имеем

$$\int\limits_{-\ell}^{\ell} \sin^2\left(\frac{\pi\, k}{\ell}\, x\right)\, dx = \int\limits_{-\ell}^{\ell} \frac{1-\cos\left(\frac{2\,\pi\, k}{\ell}\right)}{2}\, dx = \int\limits_{-\ell}^{\ell} \frac{1}{2}\, dx = \ell$$

$$\int\limits_{-\ell}^{\ell} \cos^2\left(\frac{\pi\, k}{\ell}\, x\right)\, dx = \int\limits_{-\ell}^{\ell} \frac{1+\cos\left(\frac{2\,\pi\, k}{\ell}\right)}{2}\, dx = \int\limits_{-\ell}^{\ell} \frac{1}{2}\, dx = \ell$$

Для нахождения A_0 проинтегрируем обе части равенства (5.32) от $-\ell$ до ℓ

$$\int\limits_{-\ell}^{\ell} \varphi(x)\, dx = \frac{A_0}{2}\,(2\,\ell)$$

Выразим A_0

$$A_0 = \frac{1}{\ell}\int\limits_{-\ell}^{\ell} \varphi(x)\, dx \tag{5.35}$$

Для нахождения остальных коэффициентов A_k, $k = 1, 2, \ldots$ умножим обе части равенства (5.32) на $\cos\left(\frac{\pi\, n\, x}{\ell}\right)$ и проинтегрируем от $-\ell$ до ℓ и получим

$$\int\limits_{-\ell}^{\ell} \varphi(x)\cos\left(\frac{\pi\, n\, x}{\ell}\right)\, dx = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \int\limits_{-\ell}^{\ell} \cos\left(\frac{\pi\, n\, x}{\ell}\right)\, \cos\left(\frac{\pi\, k\, x}{\ell}\right)\, dx. \tag{5.36}$$

В правой части равенства (5.36) с учетом (5.34) остается слагаемое лишь при $k = n$. Отсюда получается выражение для A_k

$$A_k = \frac{\int\limits_{-\ell}^{\ell} \varphi(x)\cos\left(\frac{\pi\, k\, x}{\ell}\right)\, dx}{\int\limits_{-\ell}^{\ell} \cos^2\left(\frac{\pi\, k}{\ell}\, x\right)\, dx} \tag{5.37}$$

или

$$A_k = \frac{1}{\ell}\int\limits_{-\ell}^{\ell} \varphi(x)\cos\left(\frac{\pi\, k\, x}{\ell}\right)\, dx. \tag{5.38}$$

Теперь определим B_k, Для этого умножим обе части равенства (5.32) на $\sin\left(\frac{\pi\, n\, x}{\ell}\right)$ и проинтегрируем от $-\ell$ до ℓ. В результате имеем

$$\int\limits_{-\ell}^{\ell} \varphi(x) \sin\left(\frac{\pi\, n\, x}{\ell}\right)\, dx = \sum_{k=1}^{\infty} B_k \int\limits_{-\ell}^{\ell} \sin\left(\frac{\pi\, n\, x}{\ell}\right) \sin\left(\frac{\pi\, k\, x}{\ell}\right) dx. \qquad (5.39)$$

С учетом (5.33) в сумме остается лишь слагаемое при $k = n$. Приходим к выражению

$$B_k = \frac{\int\limits_{-\ell}^{\ell} \varphi(x) \sin\left(\frac{\pi\, k\, x}{\ell}\right)\, dx}{\int\limits_{-\ell}^{\ell} \sin^2\left(\frac{\pi\, k}{\ell}\, x\right)\, dx} \qquad (5.40)$$

или

$$B_k = \frac{1}{\ell} \int\limits_{-\ell}^{\ell} \varphi(x) \sin\left(\frac{\pi\, k\, x}{\ell}\right)\, dx. \qquad (5.41)$$

Определив коэффициенты в решении (5.30) получаем решение краевой задачи о кольце (5.14)-(5.17).

Ответ:

$$u(x,t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(B_k \sin\frac{\pi\, k}{\ell}\, x + A_k \cos\frac{\pi\, k}{\ell}\, x\right) e^{-a^2 \left(\frac{\pi\, k}{\ell}\right)^2 t} \qquad (5.42)$$

$$\text{где } A_0 = \frac{1}{\ell} \int\limits_{-\ell}^{\ell} \varphi(x)\, dx \qquad (5.43)$$

$$A_k = \frac{1}{\ell} \int\limits_{-\ell}^{\ell} \varphi(x) \cos\left(\frac{\pi\, k\, x}{\ell}\right)\, dx. \qquad (5.44)$$

$$B_k = \frac{1}{\ell} \int\limits_{-\ell}^{\ell} \varphi(x) \sin\left(\frac{\pi\, k\, x}{\ell}\right)\, dx. \qquad (5.45)$$

Приведем примеры применения метода Фурье к решению конкретных краевых задач.

Пример 5.1. Найдите распределение температуры в тонком кольце единичного радиуса с теплоизолированной боковой поверхностью, если в начальный момент времени кольцо было нагрето по линейному закону

$$\varphi(x) = u_0 + u_1\, x,$$

где u_0, u_1 — константы.

Решение. Запишем математическую постановку задачи:

$$u_t = a^2\, u_{xx}, \quad -\pi \leqslant x \leqslant \pi \tag{5.46}$$

$$u(x, 0) = u_0 + u_1\, x \tag{5.47}$$

$$u(-\pi, t) = u(\pi, t) \tag{5.48}$$

$$u_x(-\pi, t) = u_x(\pi, t) \tag{5.49}$$

Начнем с первого этапа метода Фурье. Будем разыскивать частные решения в виде произведения

$$\tilde{u}(x, t) = X(x)\, T(t). \tag{5.50}$$

После подстановки (5.50) в уравнение (5.46) и краевые условия (5.48)-(5.49) и разделения переменных получаем дифференциальное уравнение для $T(t)$:

$$T'(t) + \lambda\, a^2\, T(t) = 0, \tag{5.51}$$

решение которого определяется по формуле (5.28) и краевую задачу для $X(x)$:

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda\, X(x) = 0, \quad x \in (-\pi, \pi) \\ X(-\pi) = X(\pi), \quad X'(-\pi) = X'(\pi). \end{cases} \tag{5.52}$$

Выпишем собственные значения и собственные функции полученной краевой задачи (5.52)

$$\lambda_0 = 0, \quad \lambda_k = k^2, \quad k \in \mathbf{N} \tag{5.53}$$

$$X_0(x) = 1, \quad X_k(x) = \left\{ \sin(\, k\, x); \, \cos(\, k\, x) \right\}, \quad k \in \mathbf{N}. \tag{5.54}$$

В итоге на первом этапе метода Фурье найдены частные решения

$$\tilde{u}_0(x,t) = 1$$
$$\tilde{u}_k(x,t) = \left\{\sin(k\,x)\,e^{-a^2\,k^2\,t};\ \cos(k\,x)\,e^{-a^2\,k^2\,t}\right\}, k \in \mathbf{N}. \qquad (5.55)$$

Еще раз подчеркнем, что построенные частные решения удовлетворяют однородному уравнению теплопроводности (5.46) и краевым условиям (5.48)-(5.49).

Приступим ко второму этапу метода Фурье. Будем строить решение, удовлетворяющее начальному условию (5.47).

Будем разыскивать решение в виде линейной комбинации бесконечного набора частных решений, т.е. в виде следующего ряда

$$u(x,t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(B_k\,\sin(k\,x) + A_k\,\cos(k\,x)\right)\,e^{-a^2\,k^2\,t}. \qquad (5.56)$$

При $t = 0$ потребуем выполнения начального условия (5.47):

$$u_0 + u_1\,x = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(B_k\,\sin(k\,x) + A_k\,\cos(k\,x)\right). \qquad (5.57)$$

Неизвестные постоянные A_0, A_k и B_k определим по формулам (5.43)–(5.45).

$$A_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(u_0 + u_1\,x)\,dx = 2\,u_0 \qquad (5.58)$$

$$A_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(u_0 + u_1\,x)\cos(k\,x)\,dx \qquad (5.59)$$

$$B_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(u_0 + u_1\,x)\sin(k\,x)\,dx. \qquad (5.60)$$

Найдем, пользуясь формулами интегрирования по частям, интеграл в выражении для A_k

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} (u_0 + u_1\, x)\, \cos(k\, x)\, dx =$$

$$= \frac{1}{k}\, (u_0 + u_1\, x)\, \sin(k\, x)\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{u_1}{k} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin(k\, x)\, dx = 0. \tag{5.61}$$

Значит, коэффициенты $A_k = 0$, $k \in \mathbf{N}$.

Теперь, интегрируя по частям, найдем интеграл для коэффициентов B_k

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} (u_0 + u_1\, x) \sin(k\, x)\, dx = -\frac{1}{k}\, (u_0 + u_1\, x)\, \cos(k\, x)\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{u_1}{k} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos(k\, x)\, dx =$$

$$= -\frac{u_1}{k}\, 2\pi \cos(k\pi) = \frac{2\pi\, u_1}{k}\, (-1)^{k+1}. \tag{5.62}$$

Таким образом, значение коэффициентов B_k

$$B_k = \frac{2\, u_1}{k}\, (-1)^{k+1}, \quad k \in \mathbf{N}. \tag{5.63}$$

Зная все коэффициенты в разложении (5.56), получаем окончательное решение задачи (5.46)-(5.49)

Ответ:

$$u(x,t) = u_0 + 2\, u_1 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\, \sin(k\, x)\, e^{-a^2\, k^2\, t}.$$

5.3 Первая краевая задача

Постановка задачи. Найдите распределение температуры в тонком однородном стержне ($0 \leqslant x \leqslant \ell$) с теплоизолированной боковой поверхностью, если начальная температура стержня является произвольной функцией $\varphi(x)$, и на концах стержня $x = 0$, $x = \ell$ поддерживается нулевая температура.

$$u_t = a^2\, u_{xx}, \quad 0 \leqslant x \leqslant \ell \tag{5.64}$$

$$u(x,0) = \varphi(x) \tag{5.65}$$

$$u(0,t) = 0, \quad u(\ell,t) = 0 \tag{5.66}$$

Решение. Начнем с первого этапа метода Фурье. Будем разыскивать частное решение дифференциального уравнения (5.64), удовлетворяющее краевым условиям (5.66). Представим решение в виде произведения

$$\tilde{u}(x,t) = X(x)\,T(t). \tag{5.67}$$

Поставим $\tilde{u}(x,t)$ в виде (5.67) в уравнение (5.64). Имеем

$$X(x)\,T'(t) = a^2\,X''(x)\,T(t). \tag{5.68}$$

Разделяя переменные, получим

$$\frac{T'(t)}{a^2\,T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}. \tag{5.69}$$

Слева в этом равенстве стоит функция от t, а справа — функция от x. Такое тождество возможно лишь тогда, когда каждая функция является некоторой постоянной, обозначим ее $-\lambda$.

$$\frac{T'(t)}{a^2\,T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda. \tag{5.70}$$

Для функций $T(t)$ и $X(x)$ получаем обыкновенные дифференциальные уравнения первого и второго порядков:

$$T'(t) + \lambda\,a^2\,T(t) = 0, \tag{5.71}$$

$$X''(x) + \lambda\,X(x) = 0. \tag{5.72}$$

Если подставить решение (5.67) в краевые условия (5.66), то имеем

$$X(0)\,T(t) = 0; \quad X(\ell)\,T(t) = 0. \tag{5.73}$$

Для любой функции $T(t)$ можно удовлетворить этим равенствам, если

$$X(0) = 0; \quad X(\ell) = 0. \tag{5.74}$$

Таким образом, функция $X(x)$ должна быть решением краевой задачи на собственные значения первого рода (5.4):

$$\begin{cases} X''(x) = -\lambda\, X(x), & x \in (0, \ell) \\ X(0) = 0; \quad X(\ell) = 0. \end{cases} \tag{5.75}$$

Эта краевая задача имеет следующий набор собственных значений и собственных функций (5.5)

$$\lambda_k = \left(\frac{\pi\, k}{\ell}\right)^2, \quad k \in \mathbf{N}, \tag{5.76}$$

$$X_k(x) = \sin\left(\frac{\pi\, k}{\ell}\, x\right), \quad k \in \mathbf{N}. \tag{5.77}$$

Теперь найдем функцию $T(t)$, которая должна удовлетворять дифференциальному уравнению (5.71). Разделяя переменные и интегрируя, имеем

$$T(t) = e^{-a^2\, \lambda\, t}, \tag{5.78}$$

где $\lambda = \lambda_k$ — собственное значение (5.76).

Таким образом, на первом этапе метода Фурье получаем бесконечный набор частных решений исходной краевой задачи следующего вида

$$\tilde{u}_k(x,t) = \sin\left(\frac{\pi\, k}{\ell}\, x\right)\, e^{-a^2\left(\frac{\pi\, k}{\ell}\right)^2 t}, \quad k \in \mathbf{N}, \tag{5.79}$$

Этим заканчивается первый этап метода Фурье.

Второй этап метода заключается в нахождении такого решения, которое удовлетворяет начальному условию. Будем разыскивать решение в виде бесконечной линейной комбинации частных решений

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k\, \sin\left(\frac{\pi\, k}{\ell}\, x\right)\, e^{-a^2\left(\frac{\pi\, k}{\ell}\right)^2 t}, \tag{5.80}$$

где неизвестные постоянные B_k определим из начального условия.

Положим $t = 0$ в решении (5.80) и получим

$$u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k\, \sin\left(\frac{\pi\, k}{\ell}\, x\right). \tag{5.81}$$

Подставляя (5.81) в (5.65), имеем

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k \sin\left(\frac{\pi k}{\ell} x\right). \tag{5.82}$$

Таким образом, B_k — коэффициенты разложения в ряд Фурье функции $\varphi(x)$ на отрезке $[0, \ell]$.

Умножим обе части равенства (5.82) на $\sin\left(\frac{\pi n x}{\ell}\right)$ и проинтегрируем от 0 до ℓ, получим

$$\int\limits_0^\ell \varphi(x) \sin\left(\frac{\pi n x}{\ell}\right) dx =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} B_k \int\limits_0^\ell \sin\left(\frac{\pi n x}{\ell}\right) \sin\left(\frac{\pi k x}{\ell}\right) dx. \tag{5.83}$$

Для определения коэффициентов Фурье функции $\varphi(x)$ воспользуемся тем, что система собственных функций ортогональна на $[0, \ell]$.

$$\int\limits_0^\ell \sin\left(\frac{\pi k}{\ell} x\right) \sin\left(\frac{\pi n}{\ell} x\right) dx = \begin{cases} 0, & k \neq n \\ \dfrac{\ell}{2}, & k = n. \end{cases} \tag{5.84}$$

В правой части равенства (5.83) с учетом ортогональности собственных функций (5.84) остается слагаемое лишь при $k = n$. Отсюда получается выражение для B_k

$$B_k = \frac{\int\limits_0^\ell \varphi(x) \sin\left(\frac{\pi k x}{\ell}\right) dx}{\int\limits_0^\ell \sin^2\left(\frac{\pi k x}{\ell}\right) dx} = \frac{2}{\ell} \int\limits_0^\ell \varphi(x) \sin\left(\frac{\pi k x}{\ell}\right) dx. \tag{5.85}$$

Определив B_k, запишем решение краевой задачи (5.64)-(5.66)

Ответ:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k \sin\left(\frac{\pi k}{\ell} x\right) e^{-a^2 \left(\frac{\pi k}{\ell}\right)^2 t}, \tag{5.86}$$

$$\text{где } B_k = \frac{2}{\ell} \int\limits_0^\ell \varphi(x) \sin\left(\frac{\pi k x}{\ell}\right) dx. \tag{5.87}$$

Пример 5.2. Найдите распределение температуры в тонком однородном стержне ($0 \leqslant x \leqslant \pi$) с теплоизолированной боковой поверхностью, если начальная температура стержня задана и равна

$$\varphi(x) = u_0 + u_1\, x,$$

где u_0, u_1 — константы. На концах стержня $x = 0$, $x = \ell$ поддерживается нулевая температура.

Решение. Запишем математическую постановку задачи:

$$u_t = a^2\, u_{xx}, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi \tag{5.88}$$

$$u(x, 0) = u_0 + u_1\, x \tag{5.89}$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(\pi, t) = 0 \tag{5.90}$$

Применим метод Фурье для решения этой задачи. На первом этапе будем разыскивать частные решения в виде

$$\tilde{u}(x, t) = X(x)\, T(t). \tag{5.91}$$

Подставим решение (5.91) в уравнение (5.88) и краевые условия (5.90) и разделим переменные. Получим дифференциальное уравнение для $T(t)$:

$$T'(t) + \lambda\, a^2\, T(t) = 0, \tag{5.92}$$

и краевую задачу для $X(x)$:

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda\, X(x) = 0, \quad x \in (0, \ell) \\ X(0) = 0,\ X(\pi) = 0. \end{cases} \tag{5.93}$$

Выпишем собственные значения и собственные функции полученной краевой задачи

$$\lambda_k = k^2, \quad k \in \mathbf{N} \tag{5.94}$$

$$X_k(x) = \sin(\, k\, x), \quad k \in \mathbf{N}. \tag{5.95}$$

Воспользуемся решением уравнения для $T(t)$ (5.78).

Таким образом, в итоге на первом этапе метода Фурье найдены частные решения

$$\tilde{u}_k(x,t) = \sin(k\,x)\,e^{-a^2\,k^2\,t},\ k \in \mathbf{N}. \tag{5.96}$$

Еще раз подчеркнем, что построенные решения удовлетворяют заданному уравнению теплопроводности (5.88) и краевым условиям (5.90).

Приступим к второму этапу метода Фурье. Будем строить решение, удовлетворяющее начальному условию (5.89).

Разыскиваем это решение в виде линейной комбинации бесконечного набора частных решений, т.е. в виде следующего ряда

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k\,\sin(k\,x)\,e^{-a^2\,k^2\,t}. \tag{5.97}$$

При $t = 0$ потребуем выполнения начального условия (5.47):

$$u_0 + u_1\,x = \sum_{k=1}^{\infty} B_k\,\sin(k\,x). \tag{5.98}$$

Неизвестные коэффициенты B_k определим по формуле (5.87)

$$B_k = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi}(u_0 + u_1\,x)\sin(k\,x)\,dx. \tag{5.99}$$

Найдем, пользуясь формулами интегрирования по частям, интеграл для B_k

$$\int\limits_0^{\pi}(u_0 + u_1\,x)\sin(k\,x)\,dx = -\frac{1}{k}\,(u_0 + u_1\,x)\,\cos(k\,x)\Big|_0^{\pi} + \frac{u_1}{k}\int\limits_0^{\pi}\cos(k\,x)\,dx =$$

$$= -\frac{1}{k}\,\cos(k\pi)\,(u_0 + u_1\,\pi) + \frac{1}{k}\,u_0 = \frac{1}{k}(u_0 - u_0\,(-1)^k - u_1\,\pi\,(-1)^k). \tag{5.100}$$

Таким образом, значение коэффициентов B_k

$$B_k = \frac{2}{\pi\,k}(u_0 - u_0\,(-1)^k - u_1\,\pi\,(-1)^k), \quad k \in \mathbf{N}. \tag{5.101}$$

Зная коэффициенты B_k в разложении (5.97), получаем окончательное решение задачи (5.88)-(5.90)

Ответ:

$$u(x,t) = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{u_0 - u_0\,(-1)^k - u_1\,\pi\,(-1)^k}{k} \sin(k\,x)\, e^{-a^2\,k^2\,t}.$$

Заметим, что при четных $k = 2\,n$ коэффициент B_{2n} примет вид

$$B_{2n} = -\frac{u_1}{n},$$

а при нечетных $k = 2\,n + 1$ коэффициент B_{2n+1} примет вид

$$B_{2n+1} = \frac{2}{\pi\,(n+1)}\,(2\,u_0 + u_1\,\pi).$$

5.4 Вторая краевая задача

Постановка задачи. Найдите распределение температуры в тонком однородном стержне ($0 \leqslant x \leqslant \ell$) с теплоизолированной боковой поверхностью, если начальная температура стержня является произвольной функцией $\varphi(x)$, и концы стержня $x = 0$, $x = \ell$ теплоизолированы.

$$u_t = a^2\,u_{xx}, \quad 0 \leqslant x \leqslant \ell \tag{5.102}$$

$$u(x,0) = \varphi(x) \tag{5.103}$$

$$u_x(0,t) = 0, \quad u_x(\ell,t) = 0 \tag{5.104}$$

Решение. Метод Фурье начинается с первого этапа, на котором разыскивается частное решение уравнения (5.102), удовлетворяющее краевым условиям (5.104). Представим решение в виде

$$\tilde{u}(x,t) = X(x)\,T(t) \tag{5.105}$$

и подставим $\tilde{u}(x,t)$ в уравнение (5.102). Имеем

$$X(x)\,T'(t) = a^2\,X''(x)\,T(t). \tag{5.106}$$

Разделяя переменные, получим выражение

$$\frac{T'(t)}{a^2\,T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

Из тождества (5.107), в котором слева стоит функция от t ($\frac{T'(t)}{a^2\,T(t)}$), а справа — функция от x ($\frac{X''(x)}{X(x)}$), следует, что такое возможно, когда

$$\frac{T'(t)}{a^2\,T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda. \tag{5.107}$$

Получаем два дифференциальных уравнения для $T(t)$ и $X(x)$

$$T'(t) + \lambda\,a^2\,T(t) = 0, \tag{5.108}$$

$$X''(x) + \lambda\,X(x) = 0. \tag{5.109}$$

Если подставить решение (5.105) в краевые условия (5.104), то получим

$$X'(0)\,T(t) = 0; \quad X'(\ell)\,T(t) = 0. \tag{5.110}$$

Для любой функции $T(t)$ можно удовлетворить этим условиям, если

$$X'(0) = 0; \quad X'(\ell) = 0. \tag{5.111}$$

Таким образом, для функции $X(x)$ получаем краевую задачу второго рода на собственные значения (5.6):

$$\begin{cases} X''(x) = -\lambda\,X(x), \quad x \in (0,\ell) \\ X'(0) = 0; \quad X'(\ell) = 0. \end{cases} \tag{5.112}$$

Эта краевая задача имеет следующие собственные значения (5.7)

$$\lambda_0 = 0, \quad \lambda_k = \left(\frac{\pi\,k}{\ell}\right)^2, \quad k \in \mathbf{N}, \tag{5.113}$$

Среди собственных значений второй краевой задачи есть ноль и нулевому собственному значению отвечает постоянная собственная функция. Выпишем собственные функции второй краевой задачи (5.7)

$$X_0(x) \equiv 1, \quad X_k(x) = \cos\left(\frac{\pi\,k}{\ell}\,x\right), \quad k \in \mathbf{N}. \tag{5.114}$$

Для определения функции $T(t)$ решим дифференциальное уравнение (5.108)

$$T(t) = e^{-a^2\,\lambda\,t}, \tag{5.115}$$

где $\lambda = \lambda_k$ — собственное значение (5.113).

Зная $T(t)$ и $X_k(x)$, получаем бесконечный набор частных решений данной краевой задачи

$$\tilde{u}_0(x,t) = 1; \quad \tilde{u}_k(x,t) = \cos\left(\frac{\pi\, k}{\ell}\, x\right)\, e^{-a^2\left(\frac{\pi\, k}{\ell}\right)^2 t}, \quad k \in \mathbf{N}. \tag{5.116}$$

На этом завершен первый этап метода Фурье.

На втором этапе потребуем, чтобы решение удовлетворяло начальному условию. Будем разыскивать решение в виде ряда

$$u(x,t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k\, \cos\left(\frac{\pi\, k}{\ell}\, x\right)\, e^{-a^2\left(\frac{\pi\, k}{\ell}\right)^2 t}, \tag{5.117}$$

где постоянные A_0, A_k пока неизвестны.

При $t = 0$ имеем

$$u(x,0) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k\, \cos\left(\frac{\pi\, k}{\ell}\, x\right). \tag{5.118}$$

Подставляя (5.118) в (5.103), получим

$$\varphi(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k\, \cos\left(\frac{\pi\, k}{\ell}\, x\right). \tag{5.119}$$

Для определения коэффициентов Фурье функции $\varphi(x)$ воспользуемся тем, что система собственных функций ортогональна на $[0,\ell]$.

$$\int\limits_0^{\ell} \cos\left(\frac{\pi\, k}{\ell}\, x\right)\, \cos\left(\frac{\pi\, n}{\ell}\, x\right)\, dx = \begin{cases} 0, & k \neq n \\ \dfrac{\ell}{2}, & k = n. \end{cases} \tag{5.120}$$

Для нахождения A_0 проинтегрируем равенство (5.119) от 0 до ℓ

$$\int\limits_0^{\ell} \varphi(x)\, dx = \frac{A_0}{2}\, \ell$$

Выразим A_0

$$A_0 = \frac{2}{\ell} \int\limits_0^{\ell} \varphi(x)\, dx. \tag{5.121}$$

Для нахождения остальных A_k, $k = 1, 2, \ldots$ умножим обе части равенства (5.119) на $\cos\left(\frac{\pi n}{\ell}\, x\right)$ и проинтегрируем от 0 до ℓ. В результате интегрирования с учетом ортогональности собственных функций (5.120) из всей суммы останется лишь слагаемое при $k = n$ и получается выражение для A_k

$$A_k \;=\; \frac{\int\limits_0^\ell \varphi(x)\cos\left(\frac{\pi\, k\, x}{\ell}\right)\, dx}{\int\limits_0^\ell \cos^2\left(\frac{\pi\, k\, x}{\ell}\right) dx} = \frac{2}{\ell}\int\limits_0^\ell \varphi(x)\cos\left(\frac{\pi\, k\, x}{\ell}\right) dx,\; k \in \mathbf{N}. \tag{5.122}$$

Теперь, зная коэффициенты A_k, получаем решение второй краевой задачи (5.102)-(5.104).

Ответ:

$$u(x,t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k\, \cos\left(\frac{\pi\, k}{\ell}\, x\right)\, e^{-a^2\left(\frac{\pi\, k}{\ell}\right)^2 t}, \tag{5.123}$$

$$\text{где } A_0 = \frac{2}{\ell}\int\limits_0^\ell \varphi(x)\, dx, \tag{5.124}$$

$$A_k = \frac{2}{\ell}\int\limits_0^\ell \varphi(x)\cos\left(\frac{\pi\, k\, x}{\ell}\right)\, dx, \quad k \in \mathbf{N}. \tag{5.125}$$

Пример 5.3. Найдите распределение температуры в тонком однородном стержне ($0 \leqslant x \leqslant \pi$) с теплоизолированной боковой поверхностью, если в начальный момент времени задано линейное распределение $u_0 + u_1\, x$, где u_0, u_1 — константы. Концы стержня $x = 0$, $x = \ell$ теплоизолированы.

Решение. Запишем математическую постановку задачи:

$$u_t = a^2\, u_{xx}, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi \tag{5.126}$$

$$u(x,0) = u_0 + u_1\, x \tag{5.127}$$

$$u_x(0,t) = 0, \quad u_x(\pi,t) = 0 \tag{5.128}$$

Применим метод Фурье к решению этой задачи. На первом этапе будем разыскивать частные решения в виде

$$\tilde{u}(x,t) = X(x)\, T(t). \tag{5.129}$$

Подставим решение (5.129) в уравнение (5.126) и краевые условия (5.128). Разделим переменные и получим две задачи для $T(t)$ и $X(x)$:

$$T'(t) + \lambda\, a^2\, T(t) \ = \ 0, \tag{5.130}$$

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda\, X(x) = 0, \quad x \in 0, \ell \\ X'(0) = X'(\pi). \end{cases} \tag{5.131}$$

Выпишем собственные значения и собственные функции полученной второй краевой задачи

$$\lambda_0 = 0, \quad \lambda_k = k^2, \quad k \in \mathbf{N} \tag{5.132}$$

$$X_0(x) = 1, \quad X_k(x) = \cos(\, k\, x), \quad k \in \mathbf{N}. \tag{5.133}$$

Решим дифференциальное уравнение для $T(t)$ (см. (5.115)) и получим частные решения заданной задачи

$$\tilde{u}_0(x,t) = 1, \quad \tilde{u}_k(x,t) = \cos(k\, x)\, e^{-a^2\, k^2\, t},\ k \in \mathbf{N}. \tag{5.134}$$

Полученные частные решения удовлетворяют заданному уравнению теплопроводности (5.126) и краевым условиям (5.128). Первый этап метода Фурье завершен.

Приступим к второму этапу метода Фурье.

Будем строить решение, удовлетворяющее начальному условию (5.127). Решение будем разыскивать в виде линейной комбинации бесконечного набора частных решений, т.е. в виде следующего ряда

$$u(x,t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k\, \cos(k\, x)\, e^{-a^2\, k^2\, t}. \tag{5.135}$$

При $t = 0$ потребуем выполнения начального условия (5.127):

$$u_0 + u_1\, x = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k\, \cos(k\, x). \tag{5.136}$$

Неизвестные постоянные A_0 и A_k, $k = 1, 2, \ldots$ определим по формулам

(5.122), (5.123).

$$A_0 = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\pi} (u_0 + u_1\, x)\, dx = 2\, u_0 + u_1\, \pi, \tag{5.137}$$

$$A_k = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\pi} (u_0 + u_1\, x) \cos(k\, x)\, dx, \quad k \in \mathbf{N}. \tag{5.138}$$

Вычислим интеграл в формуле (5.138)

$$\int\limits_0^{\pi} (u_0 + u_1\, x) \cos(k\, x)\, dx = \frac{1}{k}\, (u_0 + u_1\, x)\, \sin(k\, x)\Big|_0^{\pi} - \frac{u_1}{k} \int\limits_0^{\pi} \sin(k\, x)\, dx =$$

$$= \frac{u_1}{k^2}\, (\cos(k\pi) - 1) = \frac{u_1}{k^2}((-1)^k - 1) \tag{5.139}$$

Подставим значение интеграла в (5.138) и получим значение коэффициента A_k

$$A_k = \frac{2\, u_1}{\pi\, k^2}\, ((-1)^k - 1). \tag{5.140}$$

Получаем решение заданной второй краевой задачи (5.126)-(5.128) в виде

Ответ:

$$u(x,t) = u_0 + u_1\, \frac{\pi}{2} + \frac{2\, u_1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k - 1}{k^2}\, \cos(k\, x)\, e^{-a^2\, k^2\, t}.$$

Замечание 5.1. *Заметим, что коэффициент A_k будет ненулевым только при нечетных $k = 2n + 1$. Решение с учетом этого может быть записано в виде*

$$u(x,t) = u_0 + u_1\, \frac{\pi}{2} -$$

$$- \frac{4\, u_1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}\, \cos((2n+1)\, x)\, e^{-a^2\, (2n+1)^2\, t}.$$

5.5 Краевые задачи со смешанными краевыми условиями

Задачу со смешанными краевыми условиями будем называть смешанной краевой задачей. Смешанную краевую задачу в случае, когда на левом конце стержня задано краевое условие первого рода, а на правом — второго рода, будем называть **краевой задачей 1-2**. В случае, когда на левом конце стержня задано условие второго рода, а на правом конце — первого рода, краевую задачу будем называть **краевой задачей 2-1**. Напомним, что краевое условие первого рода означает, что на конце стержня задана температура, а краевое условие второго рода — что на конце стержня задан тепловой поток.

Рассмотрим применение метода Фурье для решения таких задач. Вначале рассмотрим краевую задачу 1-2 с однородными краевыми условиями, когда на левом конце стержня задана температура, а на правом — тепловой поток.

Постановка краевой задачи 1-2. Найдите распределение температуры в тонком однородном стержне ($0 \leqslant x \leqslant \ell$) с теплоизолированной боковой поверхностью, если начальная температура стержня является произвольной функцией $\varphi(x)$, на левом конце стержня поддерживается нулевая температура, а правый конец теплоизолирован.

$$u_t = a^2\, u_{xx}, \quad 0 \leqslant x \leqslant \ell \tag{5.141}$$

$$u(x,0) = \varphi(x) \tag{5.142}$$

$$u(0,t) = 0, \quad u_x(\ell,t) = 0 \tag{5.143}$$

Задача 5.1. Найдите решение поставленной смешанной краевой задачи 1-2 методом Фурье.

Пример 5.4. Найдите распределение температуры в тонком однородном стержне ($0 \leqslant x \leqslant \pi$) с теплоизолированной боковой поверхностью, если в начальный момент времени задано линейное распределение

$$u_0 + u_1\, x,$$

где u_0, u_1 — константы. На левом конце стержня поддерживается нулевая температура, правый конец стержня теплоизолирован.

Решение. Запишем математическую постановку задачи:

$$u_t = a^2\, u_{xx}, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi \tag{5.144}$$

$$u(x,0) = u_0 + u_1\, x \tag{5.145}$$

$$u(0,t) = 0, \quad u_x(\pi,t) = 0 \tag{5.146}$$

Применим метод Фурье к решению этой задачи. На первом этапе будем разыскивать частные решения в виде

$$\tilde{u}(x,t) = X(x)\, T(t). \tag{5.147}$$

Подставим решение (5.91) в уравнение (5.88) и краевые условия (5.90) и разделим переменные. Получим дифференциальное уравнение для $T(t)$:

$$T'(t) + \lambda\, a^2\, T(t) = 0, \tag{5.148}$$

и краевую задачу для $X(x)$:

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda\, X(x) = 0, \quad x \in (0,\ell) \\ X(0) = 0,\ X'(\pi) = 0. \end{cases} \tag{5.149}$$

Выпишем собственные значения и собственные функции полученной краевой задачи (см. (5.10))

$$\lambda_k = \left(\frac{2k-1}{2}\right)^2, \quad k \in \mathbf{N} \tag{5.150}$$

$$X_k(x) = \sin(\frac{2k-1}{2}\, x), \quad k \in \mathbf{N}. \tag{5.151}$$

Воспользуемся решением уравнения для $T(t)$ (см. метод Фурье для первой или второй краевой задачи).

Таким образом, на первом этапе метода Фурье найдены частные решения

$$\tilde{u}_k(x,t) = \sin(\frac{2k-1}{2}\, x)\, e^{-a^2 \left(\frac{2k-1}{2}\right)^2 t},\ k \in \mathbf{N}. \tag{5.152}$$

Еще раз подчеркнем, что построенные решения удовлетворяют уравнению теплопроводности (5.144) и краевым условиям (5.146).

Приступим к второму этапу метода Фурье. Будем строить решение, удовлетворяющее начальному условию (5.145). Разыскиваем решение в виде линейной комбинации бесконечного набора частных решений, т.е. в виде следующего ряда

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k \, \sin(\frac{2k-1}{2}\,x)\, e^{-a^2\left(\frac{2k-1}{2}\right)^2 t}. \tag{5.153}$$

При $t = 0$ потребуем выполнения начального условия (5.145):

$$u_0 + u_1\, x = \sum_{k=1}^{\infty} B_k \, \sin(\frac{2k-1}{2}\,x). \tag{5.154}$$

Неизвестные постоянные B_k определим по следующим формулам

$$B_k = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\pi} (u_0 + u_1\, x) \sin(\frac{2k-1}{2}\,x)\, dx. \tag{5.155}$$

Найдем, пользуясь формулами интегрирования по частям, интеграл для B_k

$$\int\limits_0^{\pi} (u_0 + u_1\, x) \sin(\frac{2k-1}{2}\,x)\, dx =$$

$$= -\frac{2}{2\,k-1}\,(u_0 + u_1\, x)\,\cos(\frac{2k-1}{2}\,x)\Big|_0^{\pi} + \frac{2\,u_1}{2\,k-1}\int\limits_0^{\pi} \cos(\frac{2k-1}{2}\,x)\, dx =$$

$$= \frac{2\,u_0}{2\,k-1} + \frac{4\,u_1}{(2\,k-1)^2}\,\sin(\frac{2k-1}{2}\,x)\Big|_0^{\pi} =$$

$$= \frac{2\,u_0}{2\,k-1} + \frac{4\,u_1}{(2\,k-1)^2}\,(-1)^{k+1}. \tag{5.156}$$

Таким образом, значение коэффициента B_k

$$B_k = \frac{2}{\pi}\left(\frac{2\,u_0}{2\,k-1} + \frac{4\,u_1}{(2\,k-1)^2}\,(-1)^{k+1}\right). \tag{5.157}$$

Зная коэффициенты B_k в разложении (5.153), получаем решение смешанной краевой задачи (5.144)-(5.146)

Ответ:

$$u(x,t) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{u_0}{2\,k-1} + \frac{2\,u_1}{(2\,k-1)^2}\,(-1)^{k+1}\right)\,\sin(\frac{2k-1}{2}\,x)\,e^{-a^2\left(\frac{2k-1}{2}\right)^2 t},$$

Перейдем к рассмотрению смешанной краевой задачи с однородными краевыми условиями в случае, когда на левом конце стержня задан тепловой поток, а на правом — температура.

Постановка краевой задачи 2-1. Найдите распределение температуры в тонком однородном стержне ($0 \leqslant x \leqslant \ell$) с теплоизолированной боковой поверхностью, если начальная температура стержня является произвольной функцией $\varphi(x)$, левый конец стержня теплоизолирован, а на правом поддерживается нулевая температура.

$$u_t = a^2\,u_{xx}, \quad 0 \leqslant x \leqslant \ell \tag{5.158}$$

$$u(x,0) = \varphi(x) \tag{5.159}$$

$$u_x(0,t) = 0, \quad u(\ell,t) = 0 \tag{5.160}$$

Задача 5.2. Найдите решение поставленной смешанной краевой задачи 2-1 методом Фурье.

Пример 5.5. Найдите распределение температуры в тонком однородном стержне ($0 \leqslant x \leqslant \pi$) с теплоизолированной боковой поверхностью, если в начальный момент времени задано линейное распределение температуры $u_0 + u_1\,x$, где u_0, u_1 — константы. Левый конец стержня теплоизолирован, в на правом конце поддерживается нулевая температура.

Решение. Запишем математическую постановку задачи:

$$u_t = a^2\,u_{xx}, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi \tag{5.161}$$

$$u(x,0) = u_0 + u_1\,x \tag{5.162}$$

$$u_x(0,t) = 0, \quad u(\pi,t) = 0 \tag{5.163}$$

Применим метод Фурье к решению этой задачи. На первом этапе будем разыскивать частные решения в виде

$$\tilde{u}(x,t) = X(x)\,T(t). \tag{5.164}$$

Подставим решение (5.164) в уравнение (5.161) и краевые условия (5.163) и разделим переменные. Получим дифференциальное уравнение для $T(t)$:

$$T'(t) + \lambda\, a^2\, T(t) = 0, \tag{5.165}$$

и краевую задачу для $X(x)$:

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda\, X(x) = 0, \quad x \in (0,\ell) \\ X'(0) = 0,\, X(\pi) = 0. \end{cases} \tag{5.166}$$

Выпишем собственные значения и собственные функции полученной краевой задачи (см. (5.11))

$$\lambda_k = \left(\frac{2k-1}{2}\right)^2, \quad k \in \mathbf{N} \tag{5.167}$$

$$X_k(x) = \cos(\frac{2k-1}{2}\,x), \quad k \in \mathbf{N}. \tag{5.168}$$

Таким образом, на первом этапе метода Фурье найдены частные решения

$$\tilde{u}_k(x,t) = \cos(\frac{2k-1}{2}\,x)\, e^{-a^2\left(\frac{2k-1}{2}\right)^2 t},\ k \in \mathbf{N}. \tag{5.169}$$

Еще раз подчеркнем, что построенные решения удовлетворяют заданному уравнению теплопроводности (5.161) и краевым условиям (5.163).

Приступим к второму этапу метода Фурье. Будем строить решение, удовлетворяющее начальному условию (5.145), в виде линейной комбинации бесконечного набора частных решений, т.е. в виде следующего ряда

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k\, \cos(\frac{2k-1}{2}\,x)\, e^{-a^2\left(\frac{2k-1}{2}\right)^2 t}. \tag{5.170}$$

При $t=0$ потребуем выполнения начального условия (5.162):

$$u_0 + u_1\, x = \sum_{k=1}^{\infty} A_k\, \cos(\frac{2k-1}{2}\, x). \tag{5.171}$$

Неизвестные постоянные A_k определим по следующей формуле

$$A_k = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\pi} (u_0 + u_1\, x) \cos(\frac{2k-1}{2}\, x)\, dx. \tag{5.172}$$

Найдем, пользуясь формулами интегрирования по частям, интеграл для A_k

$$\int\limits_0^{\pi} (u_0 + u_1\, x) \cos(\frac{2k-1}{2}\, x)\, dx =$$

$$= \frac{2}{2\,k-1}\, (u_0 + u_1\, x)\, \sin(\frac{2k-1}{2}\, x)\Big|_0^{\pi} - \frac{2\,u_1}{2\,k-1} \int\limits_0^{\pi} \sin(\frac{2k-1}{2}\, x)\, dx =$$

$$= \frac{2}{2\,k-1}\, (u_0 + u_1\, \pi)\, (-1)^{k+1} + \frac{4\,u_1}{(2\,k-1)^2}. \tag{5.173}$$

Таким образом, значение коэффициента A_k

$$A_k = \frac{2}{\pi} \left(\frac{2}{2\,k-1}\, (u_0 + u_1\, \pi)\, (-1)^{k+1} + \frac{4\,u_1}{(2\,k-1)^2} \right). \tag{5.174}$$

Определением коэффициентов A_k заканчивается второй этап метода Фурье. Получаем решение задачи краевой задачи (5.161)-(5.163).

Ответ:

$$u(x,t) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2\,k-1}\, (u_0 + u_1\, \pi)\, (-1)^{k+1} + \frac{2\,u_1}{(2\,k-1)^2} \right) \times$$

$$\times \cos(\frac{2k-1}{2}\, x)\, e^{-a^2 \left(\frac{2k-1}{2}\right)^2 t},$$

5.6 Таблица с решениями всех краевых задач

Постановка задачи	Решение задачи
$u_t = a^2\, u_{xx}, \quad -\ell \leqslant x \leqslant \ell$ $u(x,0) = \varphi(x)$ $u(-\ell,t) = u(\ell,t)$ $u_x(-\ell,t) = u_x(\ell,t)$	$u(x,t) = \frac{A_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(B_k \sin \frac{\pi\, k}{\ell}\, x + A_k \cos \frac{\pi\, k}{\ell}\, x \right) e^{-a^2 \left(\frac{\pi\, k}{\ell}\right)^2 t}$ $A_0 = \frac{1}{\ell} \int\limits_{-\ell}^{\ell} \varphi(x)\, dx$ $A_k = \frac{1}{\ell} \int\limits_{-\ell}^{\ell} \varphi(x) \cos\left(\frac{\pi\, k\, x}{\ell}\right)\, dx$ $B_k = \frac{1}{\ell} \int\limits_{-\ell}^{\ell} \varphi(x) \sin\left(\frac{\pi\, k\, x}{\ell}\right)\, dx.$
$u_t = a^2\, u_{xx}, \quad 0 \leqslant x \leqslant \ell$ $u(x,0) = \varphi(x)$ $u(0,t) = 0$ $u(\ell,t) = 0$	$u(x,t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} B_k \sin \frac{\pi\, k}{\ell}\, x\, e^{-a^2 \left(\frac{\pi\, k}{\ell}\right)^2 t}$ $B_k = \frac{2}{\ell} \int\limits_{0}^{\ell} \varphi(x) \sin\left(\frac{\pi\, k\, x}{\ell}\right)\, dx.$
$u_t = a^2\, u_{xx}, \quad 0 \leqslant x \leqslant \ell$ $u(x,0) = \varphi(x)$ $u_x(0,t) = 0$ $u_x(\ell,t) = 0$	$u(x,t) = \frac{A_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k \cos \frac{\pi\, k}{\ell}\, x\, e^{-a^2 \left(\frac{\pi\, k}{\ell}\right)^2 t}$ $A_0 = \frac{2}{\ell} \int\limits_{0}^{\ell} \varphi(x)\, dx$ $A_k = \frac{2}{\ell} \int\limits_{0}^{\ell} \varphi(x) \cos\left(\frac{\pi\, k\, x}{\ell}\right)\, dx$
$u_t = a^2\, u_{xx}, \quad 0 \leqslant x \leqslant \ell$ $u(x,0) = \varphi(x)$ $u(0,t) = 0$ $u_x(\ell,t) = 0$	$u(x,t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} B_k \sin \frac{\pi\,(2k-1)}{2\ell}\, x\, e^{-a^2 \left(\frac{\pi\,(2k-1)}{2\ell}\right)^2 t}$ $B_k = \frac{2}{\ell} \int\limits_{0}^{\ell} \varphi(x) \sin\left(\frac{\pi\,(2k-1)\, x}{2\ell}\right)\, dx.$
$u_t = a^2\, u_{xx}, \quad 0 \leqslant x \leqslant \ell$ $u(x,0) = \varphi(x)$ $u_x(0,t) = 0$ $u(\ell,t) = 0$	$u(x,t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k \cos \frac{\pi\,(2k-1)}{2\ell}\, x\, e^{-a^2 \left(\frac{\pi\,(2k-1)}{2\ell}\right)^2 t}$ $A_k = \frac{2}{\ell} \int\limits_{0}^{\ell} \varphi(x) \cos\left(\frac{\pi\,(2k-1)\, x}{2\ell}\right)\, dx.$

5.7 Задачи для самостоятельного решения

Задача 5.3. Найдите распределение температуры с тонком однородном кольце радиуса 2 с теплоизолированной боковой поверхностью, если в начальный момент времени температура меняется по закону $(2\pi - x)$.

Задача 5.4. Найдите распределение температуры с тонком однородном кольце единичного радиуса, если через боковую поверхность кольца происходит конвективный теплообмен по закону Ньютона с окружающей средой, температура которой известна и равна u_0. В начальный момент времени температура кольца постоянна и равна φ_0.

Задача 5.5. Найдите распределение температуры с тонком однородном стержне $0 \leqslant x \leqslant \ell$ с теплоизолированной боковой поверхностью, если на концах стержня поддерживается нулевая температура. В начальный момент времени температура постоянна и равна φ_0.

Задача 5.6. Найдите распределение температуры с тонком однородном стержне $0 \leqslant x \leqslant \ell$ с теплоизолированной боковой поверхностью, если на концах стержня поддерживается нулевая температура. В начальный момент времени температура известна и равна $(x - \ell)\, x$.

Задача 5.7. Найдите распределение температуры с тонком однородном стержне $0 \leqslant x \leqslant \ell$ с теплоизолированной боковой поверхностью, если на концах стержня поддерживается нулевая температура. В начальный момент времени температура задана в виде

$$\varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{\ell}\, x; & 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\ell}{2} \\ \dfrac{2}{\ell}\,(\ell - x); & \dfrac{\ell}{2} \leqslant x \leqslant \ell \end{cases}$$

Задача 5.8. Дайте словесную формулировку математической задаче и решите ее

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi$$

$$u(x,0) = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi}\,x; & 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2} \\ \dfrac{2}{\pi}\,(\pi - x); & \dfrac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \pi \end{cases}$$

$$u(0,t) = 0, \quad u(\pi,t) = 0$$

Задача 5.9. Найдите распределение температуры с тонком однородном стержне $0 \leqslant x \leqslant \ell$, если через боковую поверхность стержня осуществляется конвективный теплообмен по закону Ньютона с окружающей средой,температура которой равна 0. На концах стержня поддерживается нулевая температура и в начальный момент времени температура является произвольной функцией $\varphi(x)$.

Задача 5.10. Дайте словесную формулировку математической задаче и решите ее

$$u_t = a^2 u_{xx} - h\,u, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi$$

$$u(x,0) = \varphi_0, \quad \varphi_0 = const$$

$$u(0,t) = 0, \quad u(\pi,t) = 0$$

Задача 5.11. Найдите распределение температуры с тонком однородном стержне $0 \leqslant x \leqslant 1$ с теплоизолированной боковой поверхностью и теплоизолированными концами стержня, если в начальный момент времени температура задана функцией $(1 - 2\,x)$.

Задача 5.12. Найдите распределение температуры с тонком однородном стержне $0 \leqslant x \leqslant \ell$ с теплоизолированными концами, если на боковой поверхности происходит конвективный теплообмен по закону Ньютона со окружающей средой, температура которой равна нулю. Начальная температура стержня является произвольной функцией $\varphi(x)$.

Задача 5.13. Найдите распределение температуры с тонком однородном стержне $0 \leqslant x \leqslant \ell$ с теплоизолированными концами, если на боковой поверхности происходит конвективный теплообмен по закону Ньютона со окружающей средой, температура которой равна θ_0. Начальная температура стержня является функцией $(u_0 + u_1\, x)$.

Задача 5.14. Дайте словесную формулировку математической задаче и решите ее

$$u_t = a^2\, u_{xx}, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi$$

$$u(x,0) = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi}\, x; & 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2} \\ \dfrac{2}{\pi}\,(\pi - x); & \dfrac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \pi \end{cases}$$

$$u_x(0,t) = 0, \quad u_x(\pi,t) = 0$$

Задача 5.15. Дайте словесную формулировку математической задаче и решите ее

$$u_t = a^2\, u_{xx} - h\, u, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1$$

$$u(x,0) = \begin{cases} 2\, x; & 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{2} \\ 2\,(1 - x); & \dfrac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$$

$$u_x(0,t) = 0, \quad u_x(1,t) = 0$$

Задача 5.16. Найдите распределение температуры с тонком однородном стержне $0 \leqslant x \leqslant 1$ с теплоизолированной боковой поверхностью, если на левом конце стержня поддерживается нулевая температура, а правый конец стержня теплоизолирован. В начальный момент времени температура известна и равна $x^2 - 2\,x$.

Задача 5.17. Найдите распределение температуры с тонком однородном стержне $0 \leqslant x \leqslant 1$ с теплоизолированной боковой поверхностью, если на правом конце стержня поддерживается нулевая температура, а левый конец стержня теплоизолирован. В начальный момент времени температура известна и равна $x^2 - 1$.

5.8 Ответы к задачам

Приведем ответы к задачам для самостоятельного решения.

Номер	Ответ
(2.1)	$\xi = x - t, \quad \eta = x, \quad u_{\xi\eta} = 0$
(2.2)	$\xi = x + y, \quad \eta = y, \quad u_{\eta\eta} = 0$
(2.3)	$\xi = \ln(x + \sqrt{1+x^2}), \quad \eta = \ln(y + \sqrt{1+y^2}), \quad u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = 0$
(2.4)	$\xi = x + y + \sin(x), \quad \eta = x - y - \sin(x),$ $u_{\xi\eta} + \dfrac{1}{4}\sin\dfrac{\xi+\eta}{2}\,(u_\eta - u_\xi) = 0$
(2.5)	$y > 0,\ \xi = x, \quad \eta = \dfrac{2}{3}y^{3/2},$ $u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + \dfrac{1}{3\eta}\,u_\eta = 0$ $y < 0,\ \xi = x - \dfrac{2}{3}(-y)^{3/2}, \quad \eta = x + \dfrac{2}{3}(-y)^{3/2},$ $u_{\xi\eta} - \dfrac{1}{6(\eta-\xi)}\,(u_\xi - u_\eta) = 0$
(5.1)	см.таблицу (5.6)
(5.2)	см.таблицу (5.6)
(5.3)	$u(x,t) = 2\pi + 4\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^k}{k}\sin\left(\dfrac{k}{2}x\right)e^{-\frac{a^2k^2}{4}t}.$
(5.4)	$u(x,t) = (\varphi_0 - u_0)\,e^{-h\,t} + u_0$
(5.5)	$u(x,t) = \dfrac{2\varphi_0}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{k+1}+1}{k}\sin\left(\dfrac{\pi k}{\ell}x\right)e^{-a^2\left(\frac{\pi k}{\ell}\right)^2 t}.$
(5.6)	$u(x,t) = \dfrac{4\ell^2}{\pi^3}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^k - 1}{k^3}\sin\left(\dfrac{\pi k}{\ell}x\right)e^{-a^2\left(\frac{\pi k}{\ell}\right)^2 t}.$
(5.7)	$u(x,t) = \dfrac{8}{\pi^2}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\sin(\frac{\pi k}{2})}{k^2}\sin\left(\dfrac{\pi k}{\ell}x\right)e^{-a^2\left(\frac{\pi k}{\ell}\right)^2 t}.$
(5.8)	$u(x,t) = \dfrac{8}{\pi^2}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\sin(\frac{\pi k}{2})}{k^2}\sin(k\,x)\,e^{-a^2k^2t}.$
(5.9)	$u(x,t) = e^{-h\,t}\sum\limits_{k=1}^{\infty}B_k\sin\left(\dfrac{\pi k}{\ell}x\right)e^{-a^2\left(\frac{\pi k}{\ell}\right)^2 t}$ $B_k = \dfrac{2}{\ell}\int\limits_0^\ell \varphi(x)\sin\left(\frac{\pi k}{\ell}x\right)dx.$

Номер	**Ответ**
(5.10)	$u(x,t) = e^{-h\,t} \sum\limits_{k=1}^{\infty} B_k \, \sin(kx)\, e^{-a^2\,k^2\,t}$ $B_k = \dfrac{2\varphi_0}{\pi\,k}(1-(-1)^k).$
(5.11)	$u(x,t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k \, \cos(\pi kx)\, e^{-a^2\,\pi^2\,k^2\,t}$ $A_k = \dfrac{4}{\pi^2\,k^2}(1-(-1)^k).$
(5.12)	$u(x,t) = \dfrac{A_0}{2} e^{-h\,t} + e^{-h\,t} \sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k \, \cos\dfrac{\pi\,k}{\ell}\,x\, e^{-a^2\left(\frac{\pi\,k}{\ell}\right)^2 t}$ $A_0 = \dfrac{2}{\ell}\int\limits_0^{\ell} \varphi(x)\,dx$ $A_k = \dfrac{2}{\ell}\int\limits_0^{\ell} \varphi(x)\cos\left(\frac{\pi\,k\,x}{\ell}\right)\,dx$
(5.13)	$u(x,t) = \theta_0 + \dfrac{2(u_0-\theta_0)+u_1\,\ell}{2}\,e^{-h\,t} + e^{-h\,t}\sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k \, \cos\left(\dfrac{\pi kx}{\ell}\right)\, e^{-a^2\,\dfrac{\pi^2\,k^2}{\ell^2}\,t}$ $A_k = \dfrac{2\,u_1\,\ell}{\pi^2\,k^2}((-1)^k-1).$
(5.14)	$u(x,t) = \dfrac{1}{2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k \, \cos(kx)\, e^{-a^2\,k^2\,t}$ $A_k = \dfrac{4}{\pi^2\,k^2}(2\cos(\dfrac{\pi\,k}{2})-1-(-1)^k).$
(5.15)	$u(x,t) = \dfrac{1}{2}\,e^{-h\,t} + e^{-h\,t}\sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k \, \cos(\pi kx)\, e^{-a^2\,\pi^2\,k^2\,t}$ $A_k = \dfrac{4}{\pi^2\,k^2}(2\cos(\dfrac{\pi\,k}{2})-1-(-1)^k).$
(5.16)	$u(x,t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} B_k \, \sin\left(\dfrac{\pi\,(2\,k-1)}{2}\,x\right)\, e^{-a^2\left(\frac{\pi\,(2\,k-1)}{2}\right)^2 t}$ $B_k = -\dfrac{32}{\pi^3\,(2\,k-1)^3}.$
(5.17)	$u(x,t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k \, \cos\left(\dfrac{\pi\,(2\,k-1)}{2}\,x\right)\, e^{-a^2\left(\frac{\pi\,(2\,k-1)}{2}\right)^2 t}$ $A_k = \dfrac{32\,(-1)^k}{\pi^3\,(2\,k-1)^3}.$

Глава 6

Метод Фурье для неоднородного уравнения теплопроводности

Неоднородное уравнение теплопроводности возникает в задачах о распространении тепла в случае, когда есть тепловые источники или стоки. Пусть известна плотность источников или стоков — $F(x,t)$, тогда уравнение теплопроводности имеет вид

$$u_t = a^2\, u_{xx} + F(x,t), \quad 0 \leqslant x \leqslant \ell \tag{6.1}$$

6.1 Первая краевая задача

Рассмотрим метод Фурье для решения первой краевой задачи в случае неоднородного уравнения теплопроводности. Вначале рассмотрим задачу с нулевым начальным условием.

Постановка задачи. Найдите распределение температуры в тонком однородном стержне $0 \leqslant x \leqslant \ell$ с теплоизолированной боковой поверхностью, если начальная температура стержня равна нулю. На концах стержня также поддерживается нулевая температура и по стержню непрерывно распределены источники тепла с плотностью $F(x,t)$.

Решение. Математическая постановка задачи имеет вид:

$$u_t = a^2\, u_{xx} + F(x,t), \quad 0 \leqslant x \leqslant \ell \tag{6.2}$$

$$u(x,0) = 0 \tag{6.3}$$

$$u(0,t) = 0, \quad u(\ell,t) = 0 \tag{6.4}$$

Будем разыскивать решение этой краевой задачи в виде разложения в ряд Фурье по собственным функциям первой краевой задачи с переменными коэффициентами $B_k(t)$:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k(t)\, \sin\left(\frac{\pi\, k}{\ell}\, x\right)\, e^{-a^2 \left(\frac{\pi\, k}{\ell}\right)^2 t}. \tag{6.5}$$

Представим функцию $F(x,t)$ в виде ряда Фурье

$$F(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} F_k(t)\, \sin\left(\frac{\pi\, k}{\ell}\, x\right), \tag{6.6}$$

$$\text{где } F_k(t) = \frac{2}{\ell} \int\limits_0^{\ell} F(s,t)\, \sin\left(\frac{\pi\, k}{\ell}\, s\right)\, ds. \tag{6.7}$$

Запишем уравнение теплопроводности в виде

$$u_t - a^2\, u_{xx} = F(x,t). \tag{6.8}$$

Подставим решение (6.5) и разложение $F(x,t)$ (6.6) в уравнение теплопроводности (6.8). Получим уравнение

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\dot{B}_k(t) - \frac{\pi^2\, k^2}{\ell^2}\right)\, B_k(t)\, \sin\left(\frac{\pi\, k}{\ell}\, x\right)\, e^{-a^2 \left(\frac{\pi\, k}{\ell}\right)^2 t} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\pi^2\, k^2}{\ell^2}\, \sin\left(\frac{\pi\, k}{\ell}\, x\right)\, e^{-a^2 \left(\frac{\pi\, k}{\ell}\right)^2 t} = \sum_{k=1}^{\infty} F_k(t)\, \sin\left(\frac{\pi\, k}{\ell}\, x\right). \tag{6.9}$$

Из равенства рядов (6.9) следует, что

$$\dot{B}_k(t)\, e^{-a^2 \left(\frac{\pi\, k}{\ell}\right)^2 t} = F_k(t). \tag{6.10}$$

Перепишем дифференциальное уравнение для $B_k(t)$ в виде

$$\dot{B}_k(t) = F_k(t)\ e^{a^2\left(\frac{\pi k}{\ell}\right)^2 t}. \tag{6.11}$$

Рассмотрим решение (6.5) при $t = 0$:

$$u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k(0)\,\sin\left(\frac{\pi\,k}{\ell}\,x\right). \tag{6.12}$$

Т.к. температура в начальный момент равна нулю $u(x,0) = 0$, значит,

$$B_k(0) = 0. \tag{6.13}$$

Получаем задачу Коши для коэффициентов $B_k(t)$

$$\begin{cases} \dot{B}_k(t) = F_k(t)\ e^{a^2\left(\frac{\pi k}{\ell}\right)^2 t} \\ B_k(0) = 0 \end{cases} \tag{6.14}$$

Проинтегрируем дифференциальное уравнение в задаче Коши (6.14)

$$B_k(t) = \int\limits_0^t F_k(\tau)\ e^{a^2\left(\frac{\pi k}{\ell}\right)^2 \tau}\,d\tau + B_k(0). \tag{6.15}$$

С учетом начального условия получим

$$B_k(t) = \int\limits_0^t F_k(\tau)\ e^{a^2\left(\frac{\pi k}{\ell}\right)^2 \tau}\,d\tau. \tag{6.16}$$

Подставим в выражение для коэффициентов $B_k(t)$ выражение коэффициентов Фурье $F_k(\tau)$

$$B_k(t) = \frac{2}{\ell}\int\limits_0^t e^{a^2\left(\frac{\pi k}{\ell}\right)^2 \tau}\int\limits_0^\ell F(s,\tau)\,\sin\left(\frac{\pi\,k}{\ell}\,s\right)\,ds\,d\tau. \tag{6.17}$$

Подставим найденное значение коэффициента $B_k(t)$ в решение (6.5). Получим решение первой краевой задачи для неоднородного уравнения теплопроводности с нулевым начальным условием.

Ответ:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k \sin\left(\frac{\pi\, k}{\ell}\, x\right) e^{-a^2 \left(\frac{\pi\, k}{\ell}\right)^2 t}, \tag{6.18}$$

$$\text{где } B_k(t) = \frac{2}{\ell} \int\limits_0^t e^{a^2 \left(\frac{\pi\, k}{\ell}\right)^2 \tau} \int\limits_0^{\ell} F(s,\tau) \sin\left(\frac{\pi\, k}{\ell}\, x\right) ds\, d\tau. \tag{6.19}$$

Теперь рассмотрим задачу в случае, когда начальная температура задана произвольной функцией $\varphi(x)$.

Постановка задачи. Найдите распределение температуры в тонком однородном стержне $0 \leqslant x \leqslant \ell$ с теплоизолированной боковой поверхностью, если начальная температура является произвольной функцией $\varphi(x)$. На концах стержня поддерживается нулевая температура и по стержню непрерывно распределены источники тепла с плотностью $F(x,t)$.

Решение. Математическая постановка задачи имеет вид:

$$u_t = a^2\, u_{xx} + F(x,t), \quad 0 \leqslant x \leqslant \ell \tag{6.20}$$

$$u(x,0) = \varphi(x) \tag{6.21}$$

$$u(0,t) = 0, \quad u(\ell,t) = 0 \tag{6.22}$$

Будем разыскивать решение этой краевой задачи в виде разложения в ряд Фурье по собственным функциям первой краевой задачи с переменными коэффициентами $B_k(t)$:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k(t) \sin\left(\frac{\pi\, k}{\ell}\, x\right) e^{-a^2 \left(\frac{\pi\, k}{\ell}\right)^2 t}. \tag{6.23}$$

Представим функцию $F(x,t)$ в виде ряда Фурье

$$F(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} F_k(t) \sin\left(\frac{\pi\, k}{\ell}\, x\right), \tag{6.24}$$

$$\text{где } F_k(t) = \frac{2}{\ell} \int\limits_0^{\ell} F(s,t) \sin\left(\frac{\pi\, k}{\ell}\, s\right) ds. \tag{6.25}$$

Представим начальную температуру $\varphi(x)$ в виде ряда Фурье

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k \sin\left(\frac{\pi k}{\ell} x\right), \tag{6.26}$$

$$\text{где } \varphi_k = \frac{2}{\ell} \int\limits_0^{\ell} \varphi(s) \sin\left(\frac{\pi k}{\ell} s\right) ds. \tag{6.27}$$

Запишем уравнение теплопроводности в виде

$$u_t - a^2 u_{xx} = F(x,t). \tag{6.28}$$

Подставим решение (6.23) и разложение $F(x,t)$ (6.24) в уравнение теплопроводности (6.28). Получим уравнение

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\dot{B}_k(t) - \frac{\pi^2 k^2}{\ell^2}\right) B_k(t) \sin\left(\frac{\pi k}{\ell} x\right) e^{-a^2 \left(\frac{\pi k}{\ell}\right)^2 t} +$$
$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\pi^2 k^2}{\ell^2} \sin\left(\frac{\pi k}{\ell} x\right) e^{-a^2 \left(\frac{\pi k}{\ell}\right)^2 t} = \sum_{k=1}^{\infty} F_k(t) \sin\left(\frac{\pi k}{\ell} x\right). \tag{6.29}$$

Из равенства рядов (6.29) следует, что

$$\dot{B}_k(t)\, e^{-a^2 \left(\frac{\pi k}{\ell}\right)^2 t} = F_k(t). \tag{6.30}$$

Перепишем дифференциальное уравнение для $B_k(t)$ в виде

$$\dot{B}_k(t) = F_k(t)\ e^{a^2 \left(\frac{\pi k}{\ell}\right)^2 t}. \tag{6.31}$$

Рассмотрим решение (6.23) при $t = 0$:

$$u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k(0) \sin\left(\frac{\pi k}{\ell} x\right). \tag{6.32}$$

С учетом начального условия (6.21) и разложения (6.26) имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k \sin\left(\frac{\pi k}{\ell} x\right) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k(0) \sin\left(\frac{\pi k}{\ell} x\right). \tag{6.33}$$

Из равенства (6.33) получим начальное условие для $B_k(t)$:

$$B_k(0) = \varphi_k. \tag{6.34}$$

Получаем задачу Коши для коэффициентов $B_k(t)$

$$\begin{cases} \dot{B}_k(t) = F_k(t)\; e^{a^2\left(\frac{\pi k}{\ell}\right)^2 t} \\ B_k(0) = \varphi_k. \end{cases} \tag{6.35}$$

Проинтегрируем дифференциальное уравнение в задаче Коши (6.35)

$$B_k(t) = \int\limits_0^t F_k(\tau)\; e^{a^2\left(\frac{\pi k}{\ell}\right)^2 \tau}\, d\tau + B_k(0). \tag{6.36}$$

С учетом начального условия получим

$$B_k(t) = \int\limits_0^t F_k(\tau)\; e^{a^2\left(\frac{\pi k}{\ell}\right)^2 \tau}\, d\tau + \varphi_k. \tag{6.37}$$

Подставим в выражение для коэффициентов $B_k(t)$ выражение коэффициентов Фурье $F_k(\tau)$ и φ_k

$$B_k(t) = \frac{2}{\ell}\int\limits_0^t e^{a^2\left(\frac{\pi k}{\ell}\right)^2 \tau} \int\limits_0^\ell F(s,\tau)\,\sin\left(\frac{\pi k}{\ell}\, s\right)\, ds\, d\tau +$$

$$+\frac{2}{\ell}\int\limits_0^\ell \varphi(s)\,\sin\left(\frac{\pi k}{\ell}\, s\right)\, ds. \tag{6.38}$$

Подставим найденное значение коэффициента $B_k(t)$ в решение (6.23). Получим решение первой краевой задачи для неоднородного уравнения теплопроводности с произвольным начальным условием

Ответ:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k(t)\,\sin\left(\frac{\pi k}{\ell}\, x\right)\, e^{-a^2\left(\frac{\pi k}{\ell}\right)^2 t}, \tag{6.39}$$

$$\text{где } B_k(t) = \frac{2}{\ell}\int\limits_0^t e^{a^2\left(\frac{\pi k}{\ell}\right)^2 \tau} \int\limits_0^\ell F(s,\tau)\,\sin\left(\frac{\pi k}{\ell}\, s\right)\, ds\, d\tau +$$

$$+\frac{2}{\ell}\int\limits_0^\ell \varphi(s)\,\sin\left(\frac{\pi k}{\ell}\, s\right)\, ds. \tag{6.40}$$

Пример 6.1. Найдите распределение температуры в тонком однородном стержне $0 \leqslant x \leqslant \pi$ с теплоизолированной боковой поверхностью, если в начальный момент времени задано линейное распределение температуры

$$\varphi(x) = u_0 + u_1\, x,$$

где u_0, u_1 — константы. На концах стержня поддерживается нулевая температура и по стержню непрерывно распределены источники тепла с плотностью $F(x,t) = A\sin(3\,x)$, где A — константа.

Решение. Математическая постановка задачи имеет вид:

$$u_t = a^2\, u_{xx} + A\, \sin(3\,x), \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi \tag{6.41}$$

$$u(x,0) = u_0 + u_1\, x \tag{6.42}$$

$$u(0,t) = 0, \quad u(\pi,t) = 0 \tag{6.43}$$

Будем разыскивать решение этой краевой задачи в виде разложения в ряд Фурье по собственным функциям первой краевой задачи для стержня $0 \leqslant x \leqslant \pi$ с зависящим от времени коэффициентом $B_k(t)$:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k(t)\, \sin(k\,x)\, e^{-a^2\,k^2\,t}. \tag{6.44}$$

Представим функцию $F(x,t)$ в виде ряда Фурье

$$A\, \sin(3\,x) = \sum_{k=1}^{\infty} F_k(t)\, \sin(k\,x), \tag{6.45}$$

Такое равенство возможно при следующем выборе коэффициентов

$$F_3(t) = A, \quad F_k(t) \equiv 0, \quad k \neq 3. \tag{6.46}$$

Представим начальную температуру $\varphi(x) = u_0 + u_1\,x$ в виде ряда Фурье

$$u_0 + u_1\, x = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k\, \sin(k\,x), \tag{6.47}$$

$$\text{где } \varphi_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (u_0 + u_1\, s)\, \sin(k\,s)\, ds. \tag{6.48}$$

Воспользуемся значение интеграла, посчитанным ранее (см. (5.100)–(5.101))

$$\varphi_k = \frac{2}{\pi\, k}(u_0 - u_0\,(-1)^k - u_1\,\pi\,(-1)^k), \quad k \in \mathbf{N}. \tag{6.49}$$

Подставим решение (6.44) и разложение $F(x,t)$ (6.45) в уравнение теплопроводности и получим дифференциальное уравнение для $B_k(t)$

$$\dot{B}_k(t) = e^{a^2\,k^2\,t}\,F_k(t). \tag{6.50}$$

С учетом вида коэффициентов $F_k(t)$ получим отдельно дифференциальное уравнение для $B_k(t)$ в случае $k = 3$ и при остальных $k \neq 3$.

$$\dot{B}_3(t) = A\ e^{9\,a^2\,t} \tag{6.51}$$

$$\dot{B}_k(t) = 0 \tag{6.52}$$

Найдем начальные условия для полученных уравнений. Для этого рассмотрим решение (6.44) при $t = 0$:

$$u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k(0)\,\sin(k\,x). \tag{6.53}$$

С учетом начального условия (6.42) и разложения (6.47) имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k\,\sin(k\,x) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k(0)\,\sin(k\,x). \tag{6.54}$$

Из равенства рядов (6.33) получим начальное условие для $B_k(t)$:

$$B_k(0) = \varphi_k. \tag{6.55}$$

С учетом выражения для φ_k найдем начальное условие для $B_3(0)$:

$$B_3(0) = \varphi_3 = \frac{2}{3\pi}(2\,u_0 + u_1\,\pi). \tag{6.56}$$

Получаем две задачи Коши: одну — для коэффициента $B_3(t)$, другую — для остальных $B_k(t)$, $k \neq 3$

$$\begin{cases} \dot{B}_3(t) = A\ e^{9\,a^2\,t} \\ B_3(0) = \dfrac{2}{3\pi}(2\,u_0 + u_1\,\pi). \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{B}_k(t) = 0 \\ B_k(0) = \varphi_k. \end{cases} \tag{6.57}$$

Проинтегрируем дифференциальное уравнение в задаче Коши для $B_3(t)$

$$B_3(t) = A \int\limits_0^t e^{9\,a^2\,\tau}\,d\tau + \frac{2}{3\pi}(2\,u_0 + u_1\,\pi) =$$

$$= \frac{A}{9\,a^2}\,e^{9\,a^2\,t} + \frac{2}{3\pi}(2\,u_0 + u_1\,\pi). \tag{6.58}$$

Для коэффициентов $B_k(t)$, $k \neq 3$ имеем

$$B_k(t) = \varphi_k = \frac{2}{\pi\,k}(u_0 - u_0\,(-1)^k - u_1\,\pi\,(-1)^k), \quad k \in \mathbf{N}, k \neq 3. \tag{6.59}$$

Найдя значения всех коэффициентов, получаем решение данной краевой задачи.

Ответ:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k(t)\,\sin(k\,x)\,e^{-a^2\,k^2\,t},$$

$$\text{где } B_3(t) = \frac{A}{9\,a^2}\,e^{9\,a^2\,t} + \frac{2}{3\pi}(2\,u_0 + u_1\,\pi),$$

$$B_k(t) = \frac{2}{\pi\,k}(u_0 - u_0\,(-1)^k - u_1\,\pi\,(-1)^k), \quad k \in \mathbf{N}, k \neq 3.$$

6.2 Вторая краевая задача

Постановка задачи. Найдите распределение температуры в тонком однородном стержне $0 \leqslant x \leqslant \ell$ с теплоизолированной боковой поверхностью, если начальная температура является произвольной функцией $\varphi(x)$. Концы стержня теплоизолированы и по стержню непрерывно распределены источники тепла с плотностью $F(x,t)$.

Решение. Математическая постановка задачи имеет вид:

$$u_t = a^2\,u_{xx} + F(x,t), \quad 0 \leqslant x \leqslant \ell \tag{6.60}$$

$$u(x,0) = \varphi(x) \tag{6.61}$$

$$u_x(0,t) = 0, \quad u_x(\ell,t) = 0 \tag{6.62}$$

Будем разыскивать решение этой краевой задачи в виде разложения в ряд Фурье по собственным функциям второй краевой задачи с переменными коэффициентами:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\,A_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty} A_k(t)\,\cos\left(\frac{\pi\,k}{\ell}\,x\right)\,e^{-a^2\left(\frac{\pi\,k}{\ell}\right)^2 t}. \tag{6.63}$$

Представим функцию $F(x,t)$ в виде ряда Фурье

$$F(x,t) = \frac{1}{2}F_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty} F_k(t)\,\cos\left(\frac{\pi\,k}{\ell}\,x\right), \tag{6.64}$$

$$\text{где } F_0(t) = \frac{2}{\ell}\int\limits_0^{\ell} F(s,t)\,ds,$$

$$F_k(t) = \frac{2}{\ell}\int\limits_0^{\ell} F(s,t)\,\cos\left(\frac{\pi\,k}{\ell}\,s\right)\,ds, \quad k \in \mathbf{N}. \tag{6.65}$$

Представим начальную температуру $\varphi(x)$ в виде ряда Фурье

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}\varphi_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k\,\cos\left(\frac{\pi\,k}{\ell}\,x\right), \tag{6.66}$$

$$\text{где } \varphi_0 = \frac{2}{\ell}\int\limits_0^{\ell} \varphi(s)\,ds,$$

$$\varphi_k = \frac{2}{\ell}\int\limits_0^{\ell} \varphi(s)\,\cos\left(\frac{\pi\,k}{\ell}\,s\right)\,ds, \quad k \in \mathbf{N}. \tag{6.67}$$

Подставим решение (6.63) и разложение $F(x,t)$ (6.64) в уравнение теплопроводности и получим дифференциальные уравнения для $A_0(t)$ и $A_k(t)$

$$\begin{aligned} &\dot{A}_0(t) = F_0(t), \\ &\dot{A}_k(t) = F_k(t)\,e^{a^2\left(\frac{\pi\,k}{\ell}\right)^2 t}, \quad k \in \mathbf{N}. \end{aligned} \tag{6.68}$$

Для определения начальных условий рассмотрим решение (6.63) при $t = 0$ и приравняем к $\varphi(x)$ в виде ряда (6.66):

$$A_0(0) = \varphi_0, \quad A_k(0) = \varphi_k, \quad k \in \mathbf{N}. \tag{6.69}$$

Получаем задачи Коши для коэффициента $A_0(t)$ и для коэффициентов $A_k(t)$

$$\begin{cases} \dot{A}_0(t) = F_0(t) \\ A_0(0) = \varphi_0. \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{A}_k(t) = F_k(t)\; e^{a^2\left(\frac{\pi k}{\ell}\right)^2 t} \\ A_k(0) = \varphi_k. \end{cases} \tag{6.70}$$

Проинтегрируем и найдем значения коэффициентов $A_0(t)$, $A_k(t)$

$$A_0(t) = \int\limits_0^t F_0(\tau)\, d\tau + \varphi_0,$$

$$A_k(t) = \int\limits_0^t F_k(\tau)\; e^{a^2\left(\frac{\pi k}{\ell}\right)^2 \tau}\, d\tau + \varphi_k, \quad k \in \mathbf{N}. \tag{6.71}$$

Подставим в выражение для коэффициентов $A_0(t)$, $A_k(t)$ значения коэффициентов Фурье $F_0(\tau)$, $F_k(\tau)$ и φ_0, φ_k и получим решение второй краевой задачи для неоднородного уравнения теплопроводности с произвольным начальным условием

Ответ:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}A_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty} A_k(t)\, \cos\left(\frac{\pi k}{\ell}\, x\right)\, e^{-a^2\left(\frac{\pi k}{\ell}\right)^2 t}, \tag{6.72}$$

$$\text{где } A_0(t) = \frac{2}{\ell}\int\limits_0^t \int\limits_0^{\ell} F(s,\tau)\, ds\, d\tau + \frac{2}{\ell}\int\limits_0^{\ell} \varphi(s)\, ds,$$

$$A_k(t) = \frac{2}{\ell}\int\limits_0^t e^{a^2\left(\frac{\pi k}{\ell}\right)^2 \tau} \int\limits_0^{\ell} F(s,\tau)\, \cos\left(\frac{\pi k}{\ell}\, s\right)\, ds\, d\tau +$$

$$+\frac{2}{\ell}\int\limits_0^{\ell} \varphi(s)\, \cos\left(\frac{\pi k}{\ell}\, s\right)\, ds. \tag{6.73}$$

Пример 6.2. Найдите распределение температуры в тонком однородном стержне $0 \leqslant x \leqslant \pi$ с теплоизолированной боковой поверхностью, если в начальный момент времени задано линейное распределение температуры $\varphi(x) = u_0 + u_1\, x$, где u_0, u_1 — константы. Концы стержня теплоизолированы и по стержню непрерывно распределены источники тепла с плотностью $F(x,t) = \Phi(t)\,\cos(2\,x)$, где $\Phi(t)$ — заданная функция.

Решение. Математическая постановка задачи имеет вид:

$$u_t = a^2\,u_{xx} + \Phi(t)\,\cos(2\,x), \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi \tag{6.74}$$

$$u(x,0) = u_0 + u_1\,x \tag{6.75}$$

$$u_x(0,t) = 0, \quad u_x(\pi,t) = 0 \tag{6.76}$$

Будем разыскивать решение этой краевой задачи в следующем виде

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\,A_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty} A_k(t)\,\cos(k\,x)\,e^{-a^2\,k^2\,t}. \tag{6.77}$$

Представим функцию $F(x,t) = \Phi(t)\,\cos(2\,x)$ в виде ряда Фурье

$$\Phi(t)\,\cos(2\,x) = \frac{1}{2}F_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty} F_k(t)\,\cos(k\,x), \tag{6.78}$$

Из равенства рядов (6.78) получаем

$$F_2(t) = \Phi(t), \quad F_0(t) = 0, \quad F_k(t) = 0, \quad k \in \mathbf{N}, k \neq 2. \tag{6.79}$$

Представим начальную температуру $\varphi(x) = u_0 + u_1\,x$ в виде ряда Фурье

$$u_0 + u_1\,x = \frac{1}{2}\varphi_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k\,\cos(k\,x), \tag{6.80}$$

$$\text{где } \varphi_0 = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi}(u_0 + u_1\,s)\,ds = 2\,u_0 + u_1\,\pi,$$

$$\varphi_k = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi}(u_0 + u_1\,s)\,\cos(k\,s)\,ds, \quad k \in \mathbf{N}. \tag{6.81}$$

Для определения φ_k воспользуемся значением интеграла, посчитанным ранее (5.139)–(5.140)

$$\varphi_k = \frac{2\,u_1}{\pi\,k^2}\,((-1)^k - 1). \tag{6.82}$$

Подставим решение (6.77) в уравнение теплопроводности (6.74) и заменим плотность источников $F(x,t)$ ее рядом Фурье (6.78). Получим дифференциальные уравнения для $A_0(t)$ и $A_k(t)$

$$\begin{aligned} &\dot{A}_0(t) = F_0(t), \\ &\dot{A}_k(t) = F_k(t)\; e^{a^2\left(\frac{\pi k}{\ell}\right)^2 t}, \quad k \in \mathbf{N}. \end{aligned} \tag{6.83}$$

Теперь подставим $t = 0$ в решение (6.77) и приравняем к начальному условию $\varphi(x) = u_0 + u_1\,x$, представленному рядом Фурье (6.80). Найдем значения переменных коэффициентов A_0 и A_k при $t = 0$:

$$A_0(0) = \varphi_0, \quad A_k(0) = \varphi_k, \quad k \in \mathbf{N}. \tag{6.84}$$

Получаем задачи Коши для коэффициента $A_0(t)$ и для коэффициентов $A_k(t)$

$$\begin{cases} \dot{A}_0(t) = F_0(t) \\ A_0(0) = \varphi_0. \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{A}_k(t) = F_k(t)\; e^{a^2\left(\frac{\pi k}{\ell}\right)^2 t} \\ A_k(0) = \varphi_k. \end{cases} \tag{6.85}$$

С учетом того, что коэффициенты $F_0(t)$, $F_2(t)$, $F_k(t)$ имеют вид (6.79), запишем задачи Коши отдельно для коэффициентов $A_0(t)$, $A_2(t)$, $A_k(t)$:

$$\begin{cases} \dot{A}_0(t) = 0 \\ A_0(0) = \varphi_0. \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{A}_2(t) = \Phi(t)\; e^{4\,a^2\,t} \\ A_2(0) = \varphi_2. \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{A}_k(t) = 0, \quad k \neq 2 \\ A_k(0) = \varphi_k. \end{cases} \tag{6.86}$$

Проинтегрируем и найдем значения коэффициентов $A_0(t)$, $A_k(t)$

$$\begin{aligned} &A_0(t) = \varphi_0, \\ &A_2(t) = \int\limits_0^t \Phi(\tau)\; e^{4\,a^2\,\tau}\, d\tau + \varphi_2, \\ &A_k(t) = \varphi_k, \quad k \in \mathbf{N}, \quad k \neq 2 \end{aligned}$$

Подставим в выражение для коэффициентов посчитанные значения коэффициентов Фурье φ_0, φ_k, φ_2 (6.81) и получим решение второй краевой задачи (6.74)–(6.76)

Ответ:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}A_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty} A_k(t)\,\cos(k\,x)\,e^{-a^2\,k^2\,t},$$

где $A_0(t) = 2\,u_0 + u_1\,\pi$,

$$A_2(t) = \int\limits_0^t \Phi(\tau)\; e^{4\,a^2\,\tau}\,d\tau,$$

$$A_k(t) = \frac{2\,u_1}{\pi\,k^2}\,((-1)^k - 1), \quad k \in \mathbf{N}, \quad k \neq 2$$

Заметим, что значения $\varphi_k \neq 0$ для нечетных $k \in \mathbf{N}$. С учетом того, что для нечетных $k = 2m+1$ выражение для коэффициента φ_{2m+1} имеет вид

$$\varphi_{2m+1} = \frac{-4\,u_1}{\pi\,(2m+1)^2},$$

решение задачи может быть записано в виде

$$\begin{aligned} u(x,t) \;&=\; (u_0 + \frac{\pi}{2}\,u_1) + A_2(t)\,\cos(2\,x)\,e^{-4\,a^2\,t} - \\ &- \frac{4\,u_1}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(2m+1)^2}\,\cos((2m+1)\,x)\,e^{-a^2\,(2m+1)^2\,t}, \end{aligned}$$

$$\text{где } A_2(t) = \int\limits_0^t \Phi(\tau)\; e^{4\,a^2\,\tau}\,d\tau.$$

6.3 Краевые задачи со смешанными краевыми условиями

Постановка краевой задачи 1-2. Найдите распределение температуры в тонком однородном стержне $0 \leqslant x \leqslant \ell$ с теплоизолированной боковой поверхностью, если начальная температура — произвольная функция $\varphi(x)$. На левом конце стержня температура равна нулю, правый конец стержня теплоизолирован и по стержню непрерывно распределены источники тепла с плотностью $F(x,t)$.

Задача 6.1. Запишите математическую постановку задачи и примените метод Фурье для ее решения.

Постановка краевой задачи 2-1. Найдите распределение температуры в тонком однородном стержне $0 \leqslant x \leqslant \ell$ с теплоизолированной боковой поверхностью, если начальная температура — произвольная функция $\varphi(x)$. На левом конце стержня поток тепла равен нулю, на правом конце поддерживается нулевая температура, по стержню непрерывно распределены источники тепла с плотностью $F(x,t)$.

Задача 6.2. Запишите математическую постановку задачи и примените метод Фурье для ее решения.

6.4 Задачи для самостоятельного решения

Задача 6.3. Найдите распределение температуры в тонком однородном стержне $0 \leqslant x \leqslant 1$ с теплоизолированной боковой поверхностью, если в начальный момент времени температура постоянна $\varphi(x) = \varphi_0$, где φ_0 — константа. На концах стержня поддерживается нулевая температура и по стержню непрерывно распределены источники тепла с плотностью $F(x,t) = e^{2\,t}\,\sin(3\,\pi\,x)$.

Задача 6.4. Найдите распределение температуры в тонком однородном стержне $0 \leqslant x \leqslant 1$ с теплоизолированной боковой поверхностью, если в начальный момент времени температура постоянна $\varphi(x) = \varphi_0$, где φ_0 — константа. Концы стержня теплоизолированы и по стержню непрерывно распределены источники тепла с плотностью $F(x,t) = e^{-t}\,\cos(5\,\pi\,x)$.

Задача 6.5. Найдите распределение температуры в тонком однородном стержне $0 \leqslant x \leqslant 1$ с теплоизолированной боковой поверхностью, если в начальный момент времени температура постоянна $\varphi(x) = \varphi_0$, где φ_0 — константа. На левом конце стержня поддерживается нулевая температура, правый конец теплоизолирован. По стержню непрерывно распределены источники тепла с плотностью $F(x,t) = e^{t}\,\sin(\dfrac{3\,\pi}{2}\,x)$.

Задача 6.6. Найдите распределение температуры в тонком однородном стержне $0 \leqslant x \leqslant 1$ с теплоизолированной боковой поверхностью, если в начальный момент времени температура постоянна $\varphi(x) = \varphi_0$, где φ_0 — константа. Левый конец стержня теплоизолирован, на правом конце стержня поддерживается нулевая температура. По стержню непрерывно распределены источники тепла с плотностью $F(x,t) = e^{2\,t}\,\cos(\dfrac{5\,\pi}{2}\,x)$.

Дайте словесную формулировку следующих задач и решите их.

Задача 6.7.

$$u_t = a^2 u_{xx} + 1, \quad 0 < x < 4, t > 0,$$
$$u\Big|_{t=0} = x^2,$$
$$u\Big|_{x=0} = 0, \quad u\Big|_{x=4} = 0.$$

Задача 6.8.

$$u_t = a^2 u_{xx} + 2, \quad 0 < x < \pi, t > 0,$$
$$u\Big|_{t=0} = x,$$
$$u_x\Big|_{x=0} = 0, \quad u_x\Big|_{x=\pi} = 0.$$

Задача 6.9.

$$u_t = a^2 u_{xx} + 3, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}, t > 0,$$
$$u\Big|_{t=0} = sin 3x,$$
$$u\Big|_{x=0} = 0, \quad u_x\Big|_{x=\frac{\pi}{2}} = 0.$$

Задача 6.10.

$$u_t = a^2 u_{xx} + 4, \quad 0 < x < 1, t > 0,$$
$$u\Big|_{t=0} = cos(9\pi x/2),$$
$$u_x\Big|_{x=0} = 0, \quad u\Big|_{x=1} = 0.$$

6.5 Ответы к задачам

Приведем ответы к задачам для самостоятельного решения.

Номер	Ответ
(6.1)	$u(x,t)=\sum\limits_{k=1}^{\infty} B_k(t)\,\sin\left(\frac{\pi\,(2\,k-1)}{2\,\ell}\,x\right)\,e^{-a^2\left(\frac{\pi\,(2\,k-1)}{2\,\ell}\right)^2 t}$, $B_k(t)=\frac{2}{\ell}\int\limits_0^t e^{a^2\left(\frac{\pi\,(2\,k-1)}{2\,\ell}\right)^2\tau}\int\limits_0^\ell F(s,\tau)\,\sin\left(\frac{\pi\,(2\,k-1)}{2\,\ell}\,s\right)\,ds\,d\tau+$ $+\frac{2}{\ell}\int\limits_0^\ell \varphi(s)\,\sin\left(\frac{\pi\,(2\,k-1)}{2\,\ell}\,s\right)\,ds.$
(6.2)	$u(x,t)=\sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k(t)\,\cos\left(\frac{\pi\,(2\,k-1)}{2\,\ell}\,x\right)\,e^{-a^2\left(\frac{\pi\,(2\,k-1)}{2\,\ell}\right)^2 t}$, $B_k(t)=\frac{2}{\ell}\int\limits_0^t e^{a^2\left(\frac{\pi\,(2\,k-1)}{2\,\ell}\right)^2\tau}\int\limits_0^\ell F(s,\tau)\,\cos\left(\frac{\pi\,(2\,k-1)}{2\,\ell}\,s\right)\,ds\,d\tau+$ $+\frac{2}{\ell}\int\limits_0^\ell \varphi(s)\,\cos\left(\frac{\pi\,(2\,k-1)}{2\,\ell}\,s\right)\,ds.$
(6.3)	$u(x,t)=\frac{4\varphi_0}{\pi}\sin(\pi\,x)\,e^{-a^2\,\pi^2\,t}+(\frac{4\varphi_0}{3\pi}-1)\sin(3\,\pi\,x)\,e^{-9\,a^2\,\pi^2\,t}+\frac{1}{2+9\,a^2\pi^2}\,\sin(3\,\pi\,x)\,e^{2\,t}+$ $+\frac{2\varphi_0}{\pi}\sum\limits_{k=5}^{\infty}\frac{1-(-1)^k}{k}\,\sin(\pi\,k\,x)\,e^{-a^2\,\pi^2\,k^2\,t}.$
(6.4)	$u(x,t)=\varphi_0+\frac{1}{25\,\pi^2\,a^2}\left(e^{-t}-e^{-25\,pi^2\,a^2\,t}\right)\cos(5\,\pi\,x)$
(6.5)	$u(x,t)=\left(\frac{4\varphi_0}{3\,\pi}\,e^{-a^2\,\frac{9}{4}\,\pi^2\,t}+\frac{1}{1+\frac{9}{4}\,a^2\,\pi^2}\left(e^t-e^{-a^2\,\frac{9}{4}\,\pi^2\,t}\right)\right)\,\sin(\frac{3\,\pi}{2}\,x)+$ $+\frac{4\varphi_0}{\pi}\sum\limits_{k=1,k\neq 2}^{\infty}\frac{1}{2\,k-1}\,\sin(\frac{\pi\,(2k-1)}{2}\,x)\,e^{-a^2\,\frac{\pi^2\,(2k-1)^2}{4}\,t}.$
(6.6)	$u(x,t)=\left(\frac{4\varphi_0}{5\,\pi}\,e^{-a^2\,\frac{25}{4}\,\pi^2\,t}+\frac{1}{1+\frac{25}{4}\,a^2\,\pi^2}\left(e^{2\,t}-e^{-a^2\,\frac{25}{4}\,\pi^2\,t}\right)\right)\,\cos(\frac{5\,\pi}{2}\,x)+$ $+\frac{4\varphi_0}{\pi}\sum\limits_{k=1,k\neq 3}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{2\,k-1}\,\cos(\frac{\pi\,(2k-1)}{2}\,x)\,e^{-a^2\,\frac{\pi^2\,(2k-1)^2}{4}\,t}.$

Глава 7

Преобразование Фурье

7.1 Основные теоремы

Преобразованием Фурье называется интегральное преобразование, сопоставляющее функции $f(t)$, определенной на вещественной оси $\mathbb{R}$, функцию $F(x)$, определяемую интегралом

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-itx}\, dt.$$

Используются также обозначения

$$F(x) = \widehat{f}(x) = (\mathcal{F}f)(x).$$

Если интеграл понимается в смысле Лебега, то преобразование Фурье определено в классе $L_1(\mathbb{R})$ интегрируемых по Лебегу функций. Однако при операторной трактовке преобразование Фурье распространяется на весьма широкие классы обобщенных функций.

Первым классическим результатом о преобразовании Фурье является лемма Римана - Лебега.

Теорема 2. *Если $f(t)$ – интегрируемая по Лебегу функция, то ее преобразование Фурье $\widehat{f}(x)$ равномерно непрерывно на вещественной оси $\mathbb{R}$ и $\widehat{f}(x) \to 0$ при $|x| \to \infty$.*

В теории преобразования Фурье важную роль играют результаты об обращении. Приведем один из наиболее простых результатов.

Теорема 3. *Пусть $f(t) \in L_1(\mathbb{R})$, непрерывна в точке t_0 и удовлетворяет в ней условию Дини:*

$$\int\limits_{-\delta}^{\delta} \frac{|f(t_0+h) - f(t_0)|}{|h|}\, dh < \infty.$$

Тогда значение $f(t_0)$ восстанавливается по формуле обращения

$$f(t_0) = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-R}^{R} \widehat{f}(x) e^{it_0 x}\, dx.$$

Обычно формулу обращения записывают в виде

$$f(t_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(x) e^{it_0 x}\, dx,$$

подразумевая при этом, что интеграл понимается в смысле главного значения, как это указано в формулировке теоремы.

Существенную роль в приложениях преобразования Фурье к дифференциальным уравнениям играет следующая теорема о преобразовании Фурье производной.

Теорема 4. *Пусть $f(t)$ – непрерывно дифференцируемая функция и принадлежит вместе со своей производной классу $L_1(\mathbb{R})$. Тогда справедлива формула*

$$(\mathcal{F}f')(x) = ix(\mathcal{F}f)(x).$$

Естественным обобщением данного результата является

Следствие 1. *Пусть $f(t)$ – n-раз непрерывно дифференцируемая функция и принадлежит вместе со своими производными классу $L_1(\mathbb{R})$. Тогда справедливы формулы*

$$(\mathcal{F}f^{(k)})(x) = (ix)^k(\mathcal{F}f)(x),\ k = 1, ...n. \tag{7.1}$$

Формула 7.1 и лемма Римана-Лебега позволяют определить поведение преобразования Фурье на бесконечности.

Следствие 2. *Пусть функция $f(t)$ удовлетворяет условиям следствия 1. Тогда*

$$(\mathcal{F}f)(x) = o(1/x^n) \text{ при } |x| \to \infty.$$

Одним из важных классов функций, в котором рассматривается преобразование Фурье, является класс $S(\mathbb{R})$ бесконечно дифференцируемых быстро убывающих функций. Функция $f(t)$ принадлежит классу $S(\mathbb{R})$, если

$$p_{n,m}(f) = \sup_t |t^m f^{(n)}(t)| < \infty$$

для всех n, m.

В пространстве $S(\mathbb{R})$ вводится понятие сходимости. Говорят, что последовательность $\{f_k\}$ сходится в пространстве $S(\mathbb{R})$ к функции f, если

$$p_{n,m}(f_k - f) \to 0$$

при $k \to \infty$ для всех n, m.

Теорема 5. *Преобразование Фурье $\mathcal{F}$ взаимно однозначно и взаимно непрерывно отображает пространство $S(\mathbb{R})$ на себя. Обратное преобразование Фурье определяется формулой*

$$(\mathcal{F}^{-1}g)(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(t) e^{itx}\, dt.$$

Заметим, что взаимная непрерывность означает, что непрерывны оба отображения $\mathcal{F}$ и $\mathcal{F}^{-1}$, т.е. если $f_n \to f$ в пространстве $S(\mathbb{R})$, то $\mathcal{F}^{\pm 1} f_n \to \mathcal{F}^{\pm 1} f$.

Задача 7.1. Выяснить какие из приведенных функций принадлежат классу $S(\mathbb{R})$:

$$t^n e^{-t^2},\ \chi_{[0,+\infty)}(t) e^{-t^2},\ e^{-|t|},\ (1+t^2)^{-1},\ th\, t,\ \frac{d}{dt} th\, t.$$

Задача 7.2. Доказать, что пространство $S(\mathbb{R})$ инвариантно относительно операций дифференцирования и умножения на многочлены.

7.2 Примеры вычисления преобразования Фурье

В простых случаях преобразование Фурье может быть вычислено непосредственным интегрированием.

Задача 7.3. Найти преобразование Фурье для следующих функций

$$1.\ \chi_{[a,b]}(t), \qquad 2.\ e^{-\alpha|t|},$$
$$3.\ \chi_{(-\infty,0]}(t)\, e^{t}, \qquad 4.\ \chi_{[a,b]}(t)\, \sin t.$$

Во многих случаях можно использовать мощные методы теории аналитических функций, в частности, теорию вычетов.

Пример 7.1. *Найти преобразование Фурье для* $f(t) = 1/(t^2+1)$.

Решение. Функция $f(z) = 1/(z^2+1)$ аналитична в комплексной плоскости за исключением простых полюсов в точках $z = \pm i$. Для вычисления преобразования Фурье

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-itx}}{t^2+1}\, dt$$

поступаем следующим образом.

Рассмотрим интегралы

$$J_R^{\pm}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{L_R^{\pm}} \frac{e^{-izx}}{z^2+1}\, dz,$$

где $L_R^{\pm}$ – замкнутый контур, получающийся добавлением к отрезку $[-R, R]$ полуокружности $C_R^{\pm}$ с центром в нуле радиуса R, причем C_R^{+} расположена в верхней полуплоскости, а C_R^{-} – в нижней полуплоскости. Заметим, что L_R^{+} положительно ориентированная кривая, а L_R^{-} – отрицательно ориентирована. Данные интегралы легко вычисляются методом вычетов.

Напомним основную теорему о вычетах.

Теорема 6. *Пусть* $g(z)$ *– функция, аналитическая в области* D *за исключением изолированных полюсов, и* L *– замкнутая кусочно гладкая положительно ориентированная кривая, содержащая внутри себя полюса*

$z_1, z_2, ...z_n$. *Тогда справедлива формула*

$$\int\limits_L g(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{res}_{z=z_k} g(z),$$

где $\mathrm{res}_{z=z_k} g(z)$ *– вычет функции* $g(z)$ *в полюсе* z_k*, который вычисляется по формуле*

$$\mathrm{res}_{z=z_k} g(z) = \lim_{z\to z_k} \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} (g(z)(z-z_k)^n),$$

где n *– порядок полюса* z_k*.*

В результате применения этой теоремы получаем

$$J_R^{\pm}(x) = \sqrt{\pi/2}e^{\pm x}. \tag{7.2}$$

Как, исходя из этого результата, получить преобразование Фурье $\widehat{f}(x)$?

Переходя к пределу в формуле 7.2, получаем

$$\widehat{f}(x) + \lim_{R\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{C_R^{\pm}} \frac{e^{-izx}}{z^2+1}\,dz = \sqrt{\pi/2}e^{\pm x}.$$

Ясно, что для вычисления $\widehat{f}(x)$ нужно знать пределы интегралов по полуокружностям $C_R^{\pm}$ при $R \to \infty$.

Известная лемма Жордана указывает условия, при которых интегралы такого типа стремятся к нулю.

Теорема 7. *(Жордан) Пусть*

$$\max_{z\in C_R^-} |g(z)| \to 0 \ (\max_{z\in C_R^+} |g(z)| \to 0)$$

при $R \to \infty$ *и* $x > 0$ $(x < 0)$*. Тогда*

$$\lim_{R\to\infty} \int\limits_{C_R^-} g(z)e^{-izx}\,dz = 0$$

$$\left(\lim_{R\to\infty} \int\limits_{C_R^+} g(z)e^{-izx}\,dz = 0\right).$$

Согласно лемме Жордана имеем

$$\widehat{f}(x) = \sqrt{\pi/2}e^{x} \text{ при } x < 0$$

и

$$\widehat{f}(x) = \sqrt{\pi/2}e^{-x} \text{ при } x > 0,$$

что можно представить одной формулой

$$\widehat{f}(x) = \sqrt{\pi/2}e^{-|x|}.$$

Аналогичные соображения можно применять в более сложной ситуации, когда у подынтегральной функции может быть счетное число полюсов.

Пример 7.2. *Найти преобразование Фурье для функции* $f(t) = 1/ch\, t$.

Решение. Функция $1/ch\, z$ имеет простые полюса в точках $z_k = i(k + 1/2)\pi$ $k = 0, \pm 1, \ldots$ Соответствующие вычеты имеют вид

$$2\pi i \mathrm{res}_{z=z_k}\{\frac{e^{-izx}}{ch\, z}\} = 2\pi i \frac{e^{-iz_k x}}{sh\, z_k} =$$

$$= 2\pi \frac{e^{(k+1/2)\pi x}}{\sin{(k+1/2)x}} = 2\pi(-1)^k e^{(k+1/2)\pi x}.$$

Заметим, что при вычислении интегралов предельным переходом с помощью теории вычетов, вообще говоря, не обязательно осуществлять замыкание отрезка с помощью полуокружностей. Для этой цели можно использовать систему контуров $\Gamma_n^{\pm}$, уходящих на бесконечность соответственно в верхней или нижней полуплоскости.

Пусть, например, $x < 0$. Тогда рассмотрим замкнутый контур $L_{R,n}^{+}$, являющийся границей прямоугольника с вершинами $-R$, R, $R+in\pi$, $-R+in\pi$ и интеграл

$$J_{R,n}^{+} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{L_{R,n}^{+}} \frac{e^{-izx}}{ch\, z}\, dz.$$

В данном случае $\Gamma_{R,n}^{+} = L_{R,n}^{+} \setminus [-R, R]$. Остается показать, что

$$\int\limits_{\Gamma_{R,n}^{+}} \frac{e^{-izx}}{ch\, z}\, dz \to 0 \text{ при } R, n \to \infty.$$

Докажите этот факт самостоятельно. После этого получаем, что при $x < 0$

$$\widehat{f}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{2\pi}(-1)^n e^{(n+1/2)\pi x}.$$

Суммируя данный ряд как геометрическую прогрессию, имеем при $x < 0$

$$\widehat{f}(x) = \sqrt{2\pi}\frac{e^{\pi x/2}}{1+e^{\pi x}} = \sqrt{\pi/2}\frac{1}{ch\,\pi x/2}.$$

Докажите непосредственным вычислением, что формула верна и для случая $x > 0$.

Задача 7.4. Найти преобразование Фурье для следующих функций $t/sh\,t$, $sin\,t/t$.

Пример 7.3. *Найти преобразование Фурье функции* $f(t) = e^{-\alpha t^2}$

Решение.

1 способ. Функция $e^{-\alpha z^2}$ аналитическая на всей комплексной плоскости. Поэтому

$$\int\limits_{C_R} e^{-\alpha z^2} e^{-izx}\,dz = 0,$$

где C_R – граница прямоугольника с вершинами в точках $-R$, R, $R + iy$, $-R + iy$. Интегралы

$$\int\limits_{\pm R}^{\pm R+iy} e^{-\alpha z^2} e^{-izx}\,dz$$

стремятся к нулю при $R \to +\infty$. Поэтому

$$\widehat{f}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty+iy}^{+\infty+iy} e^{-\alpha z^2} e^{-izx}\,dz$$

и не зависит от y.

Осуществляя замену $z = t + iy$, сведем интеграл на вещественную ось и выберем y так, чтобы подынтегральная функция приняла наиболее простой вид. Имеем

$$\widehat{f}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha(t+iy)^2} e^{-i(t+iy)x}\, dt.$$

Полагая $y = -x/(2\alpha)$, приведем интеграл к виду

$$\widehat{f}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{4\alpha}} e^{-\alpha t^2}\, dt.$$

Замена переменной $\tau = \alpha t^2$ позволяет свести интеграл к Γ – функции Эйлера, в результате окончательно получаем

$$\widehat{f}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} e^{-\frac{x^2}{4\alpha}}.$$

2 способ. Дифференцируя интеграл

$$J(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha t^2} e^{-itx}\, dt$$

и интегрируя по частям, приходим к дифференциальному уравнению

$$J'(x) = -\frac{x}{2\alpha} J(x).$$

Поэтому

$$J(x) = Ce^{-\frac{x^2}{4\alpha}},$$

где

$$c = J(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha t^2}\, dt.$$

Сводя последний интеграл к Γ-функции, устанавливаем, что $c = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}}$.

7.3 Преобразование Фурье обобщенных функций

Напомним определение обобщенных функций класса $S'(\mathbb{R})$.

Определение 7.1. *Обобщенной функцией класса $S'(\mathbb{R})$ называется линейный непрерывный функционал f на пространстве основных функций $S(\mathbb{R})$.*

Далее помимо обычного обозначения $f(\varphi)$ для значения функционала на основной функции будем использовать также обозначение $< f, \varphi >$.

Определение 7.2. *Преобразование Фурье обобщенной функции $f \in S'(\mathbb{R})$ есть обобщенная функция, определяемая формулой*

$$< \mathcal{F}f, \varphi > = < f, \mathcal{F}\varphi >,$$

где φ – любая основная функция.

Для преобразования Фурье обобщенных функций как и для обычных функций используется обозначение $\widehat{f}$. Аналогично определяется $\mathcal{F}^{-1}f$:

$$< \mathcal{F}^{-1}f, \varphi > = < f, \mathcal{F}^{-1}\varphi > .$$

Справедлива следующая теорема о преобразовании Фурье в классе $S'(\mathbb{R})$.

Теорема 8. *Преобразование Фурье*

$$\mathcal{F} : S'(\mathbb{R}) \to S'(\mathbb{R})$$

взаимно однозначно отображает $S'(\mathbb{R})$ на $S'(\mathbb{R})$. Его обратным отображением является $\mathcal{F}^{-1}$.

Теорема доказывается удивительно просто. Для любой обобщенной функции $f \in S'(\mathbb{R})$ справедлива цепочка равенств

$$< \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}f, \varphi > = < \mathcal{F}f, \mathcal{F}^{-1}\varphi > = < f, \mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}\varphi > = < f, \varphi > .$$

Следовательно,

$$\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F} = id.$$

Аналогично доказывается, что

$$\mathcal{F}\mathcal{F}^{-1} = id.$$

Приведем некоторые примеры вычисления преобразования Фурье обобщенных функций.

Пример 7.4. *Найти преобразование Фурье δ-функции Дирака.*

Решение. Напомним, что δ-функция определяется формулой

$$< \delta, \varphi >= \varphi(0).$$

Поэтому

$$< \mathcal{F}\delta, \varphi >=< \delta, \mathcal{F}\varphi >= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\, dt =< \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \varphi > .$$

Следовательно, $\mathcal{F}\delta = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

Пример 7.5. *Найти преобразование Фурье производной δ-функции.*

Решение. Так как $\delta'(x)$ определяется соотношением

$$< \delta', \varphi >= -\varphi'(0),$$

то

$$< \mathcal{F}\delta', \varphi >=< \delta', \mathcal{F}\varphi >= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (-it)\varphi(t)\, dt =< \frac{it}{\sqrt{2\pi}}, \varphi > .$$

Таким образом,

$$\mathcal{F}\delta' = \frac{it}{\sqrt{2\pi}}.$$

Задача 7.5. Доказать формулу

$$\mathcal{F}\delta^{(n)} = \frac{i^n t^n}{\sqrt{2\pi}}.$$

Задача 7.6. Найти преобразование Фурье для смещенной δ-функции и ее производных. Смещенная δ-функция определяется формулой

$$< \delta_h, \varphi >= \varphi(h).$$

Пример 7.6. *Найти преобразование Фурье обобщенной функции $f = 1$.*

Решение. Проще всего воспользоваться результатами примера 7.4, где установлено, что $\mathcal{F}\delta = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$. Аналогично этому примеру устанавливается, что $\mathcal{F}^{-1}\delta = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$. Тогда в силу теоремы обращения $\mathcal{F}1 = \sqrt{2\pi}\delta$.

Однако представляет интерес прямое доказательство этой формулы. Имеем следующее соотношение

$$< \mathcal{F}1, \varphi >=< 1, \mathcal{F}\varphi >= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dt \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) e^{-itx}\, dx =$$

$$= \lim_{R\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-R}^{+R} dt \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) e^{-itx}\, dx = \lim_{R\to+\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \frac{\sin Rx}{x}\, dx.$$

Для предельного перехода воспользуемся известным интегралом Дирихле

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin Rx}{x}\, dx = \pi.$$

Тогда справедливо представление

$$< \mathcal{F}1, \varphi >= \sqrt{2\pi}\varphi(0) + \lim_{R\to+\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (\varphi(x) - \varphi(0)) \frac{\sin Rx}{x}\, dx.$$

Таким образом, остается показать, что предел интеграла в последней формуле равен нулю. Обозначим данный интеграл через $J(R)$ и представим в виде суммы трех интегралов:

$$J(R) = J_1(R) + J_2(R) + J_3(R),$$

где

$$J_1(R) = \int\limits_{|x|<\delta} (\varphi(x) - \varphi(0)) \frac{\sin Rx}{x}\, dx,$$

$$J_2(R) = \int\limits_{|x|>\delta} \varphi(x) \frac{\sin Rx}{x}\, dx,$$

$$J_3(R) = -\int\limits_{|x|>\delta} \varphi(0) \frac{\sin Rx}{x}\, dx.$$

Тогда интегралы $J_1(R),\ J_2(R)$ стремятся к нулю при $R \to \infty$ в силу леммы Римана-Лебега. Интеграл $J_3(R)$ после замены $Rx = s$ приводится к виду

$$J_3(R) = -\int\limits_{|x|>R\delta} \varphi(0))\frac{\sin s}{s}\,ds.$$

Поэтому $J_3(R) \to 0$ при $R \to \infty$ ввиду условной сходимости интеграла $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin s}{s}\,ds$.

Задача 7.7. Найти преобразование Фурье обобщенной функции $f(t) = t^n$.

Задача 7.8. Доказать, что для обобщенной функции f класса $S'(\mathbb{R})$ справедливы формулы

$$\mathcal{F}f^{(n)} = (ix)^n \mathcal{F}f,$$
$$\mathcal{F}(t^n f) = i^n(\mathcal{F}f)^{(n)}.$$

7.4 sin – и cos-преобразования Фурье

Предварительно отметим следующие свойства инвариантности преобразования Фурье.

Теорема 9. *Справедливы следующие утверждения:*

1. *преобразование Фурье $\widehat{f}(x)$ четно тогда и только тогда, когда функция $f(t)$ четна;*
2. *преобразование Фурье $\widehat{f}(x)$ нечетно тогда и только тогда, когда функция $f(t)$ нечетна;*
3. *преобразование Фурье $\widehat{f}(x)$ удовлетворяет соотношению $\overline{\widehat{f}(x)} = \widehat{f}(-x)$ тогда и только тогда, когда функция $f(t)$ вещественна.*

Доказательство. Пусть $f(t)$ – четна, тогда

$$\widehat{f}(-x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt} f(t)\,dt.$$

Совершая замену переменной $t \to -t$, получаем, что

$$\widehat{f}(-x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt} f(t)\, dt = \widehat{f}(x).$$

Задача 7.9. Доказать утверждения 2 и 3.

Используя свойства инвариантности преобразования Фурье можно ввести на положительной полуоси sin – и cos-преобразования Фурье.

Пусть, например, $f(t)$ – четная функция. тогда ее преобразование Фурье также четная функция. Свернем формулы прямого и обратного преобразования Фурье на полуось. Тогда получаются формулы прямого и обратного cos-преобразования Фурье

$$\widehat{f}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_{0}^{\infty} \cos xt\, f(t)\, dt,$$

$$f(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_{0}^{\infty} \cos xt\, \widehat{f}(t)\, dt.$$

Условия применимости этих формул совпадают с условиями применимости для преобразования Фурье.

Задача 7.10.

Установить формулы прямого и обратного sin-преобразования Фурье

$$\widehat{f}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_{0}^{\infty} \sin xt\, f(t)\, dt,$$

$$f(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_{0}^{\infty} \sin xt\, \widehat{f}(t)\, dt.$$

Пример 7.7. *Найти cos-преобразование Фурье второй производной функции* $f(t)$.

Решение. Предполагаем, что $f(t)$ дважды непрерывно дифференцируема на $[0,+\infty]$ и абсолютно интегрируема вместе со своими производными $f'(t)$ и $f''(t)$. Пусть $F(x)$ – cos-преобразование Фурье функции $f(t)$. Рассмотрим cos-преобразование Фурье для $f''(t)$:

$$\widehat{f''}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^\infty \cos xt\, f''(t)\,dt.$$

Осуществляя дважды интегрирование по частям, приходим к формуле

$$(\mathcal{F}_c f)(x)=-\sqrt{\frac{2}{\pi}}f'(0)-x^2(\mathcal{F}_c f)(x).$$

Здесь и далее для того, чтобы различать sin- и cos-преобразования Фурье используем обозначения $\mathcal{F}_s$ и $\mathcal{F}_c$.

Задача 7.11. Найти формулу для sin-преобразования Фурье второй производной функции $f(t)$.

Ответ.

$$(\mathcal{F}_s f)(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}xf(0)-x^2(\mathcal{F}_s f)(x).$$

Задача 7.12. Найти формулы для cos- и sin- преобразований Фурье производных четного порядка.

Пример 7.8. *Найти cos-преобразования Фурье следующих функций*

$$1).\ e^{-\alpha x^2},\quad 2).\ e^{-\alpha x^2}\cos\beta x\ \ (\alpha>0).$$

Решение.

1. Используя соображения четности и результаты примера 7.3, имеем

$$\mathcal{F}_c(e^{-\alpha x^2})(y)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^\infty e^{-\alpha x^2}\cos xy\,dx=$$

$$=Re\left(\sqrt{\frac{1}{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^\infty e^{-\alpha x^2}e^{ixy}\,dx\right)=\frac{e^{-\frac{y^2}{4\alpha}}}{\sqrt{2\alpha}}.$$

2. Используя формулу

$$\cos\beta x\cos xy = 1/2(\cos(y+\beta)x+\cos(y-\beta)x),$$

сводим вычисление к уже рассмотренному случаю.

Ответ. $\frac{1}{2\sqrt{2\alpha}}(e^{-\frac{(y+\beta)^2}{4\alpha}}+e^{-\frac{(y-\beta)^2}{4\alpha}})$.

Задача 7.13. Найти sin-преобразование Фурье следующих функций

$$1).\ \ xe^{-\alpha x^2},\quad 2).\ \ xe^{-\alpha x^2}\cos\beta x\ (\alpha>0).$$

Ответ:

1). $y\frac{e^{-\frac{y^2}{4\alpha}}}{2\alpha\sqrt{2\alpha}}$, 2). $\frac{1}{4\alpha\sqrt{2\alpha}}((y+\beta)e^{-\frac{(y+\beta)^2}{4\alpha}}+(y-\beta)e^{-\frac{(y-\beta)^2}{4\alpha}})$.

Пример 7.9. *Найти формулу обращения для интегрального преобразования*

$$U(\lambda)=(Gu)(\lambda)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^\infty(\lambda\cos\lambda x+\beta\sin\lambda x)u(x)\,dx.$$

Решение. Считаем, что $u(x)$ – гладкая функция, равная нулю вне некоторого конечного промежутка. Такие функции называются финитными. Используя соотношение $\lambda\cos\lambda x=\frac{d}{dx}(\sin\lambda x)$ и интегрируя по частям, получаем

$$U(\lambda)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^\infty\sin\lambda x(\beta u(x)-u'(x))\,dx.$$

Согласно формуле обращения для sin-преобразования Фурье, имеем

$$u'(x)-\beta u(x)=-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^\infty\sin\lambda xU(\lambda)\,d\lambda.$$

После этого $u(x)$ можно определить, решая линейное дифференциальное уравнение. Применяя метод интегрирующего множителя, устанавливаем равенство

$$\frac{d}{dx}(\exp\{-\beta x\}u(x))=-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^\infty\exp\{-\beta x\}\sin\lambda x\,U(\lambda)\,d\lambda.$$

Считая, что $\beta > 0$, проинтегрируем от x до ∞. Учитывая, что

$$\int\limits_x^\infty \exp\{-\beta x\} \sin \lambda x \, dx = \mathrm{Im} \left(\int\limits_x^\infty \exp\{-\beta x\} e^{i\lambda x} \, dx \right) =$$

$$= \mathrm{Im} \frac{e^{-\beta x + i\lambda x}}{\beta - i\lambda} = \frac{e^{-\beta x}}{\beta^2 + \lambda^2} (\beta \sin \lambda x + \lambda \cos \lambda x),$$

устанавливаем следующую формулу обращения

$$u(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^\infty \frac{\lambda \cos \lambda x + \beta \sin \lambda x}{\beta^2 + \lambda^2} U(\lambda) \, d\lambda. \tag{7.3}$$

Заметим, что пока она установлена лишь при $\beta > 0$.

Задача 7.14. Установить непосредственной проверкой справедливость формулы 7.3 при $\beta < 0$.

Задача 7.15. Найти $(Gu'')(\lambda)$ для преобразования G, определенного в предыдущем примере.

Ответ. $(Gu'')(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \lambda(-u'(0) + \beta u(0)) - \lambda^2 (Gu)(\lambda)$.

7.5 Многомерное преобразование Фурье

Аналогично одномерному случаю многомерное преобразование Фурье для функций на $\mathbb{R}^n$ определяется формулой

$$(\mathcal{F} f)(y) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-i(x,y)} \, dx,$$

где $x, y \in \mathbb{R}^n$, $(x, y) = \sum\limits_{j=0}^n x_j y_j$. Как и в одномерном случае пространство быстро убывающих бесконечно дифференцируемых функций $S(\mathbb{R}^n)$ определяется как множество всех бесконечно дифференцируемых функций $f(x)$ на $\mathbb{R}^n$, для которых выполняются условия

$$\sup_x |x^\alpha \partial^\beta f(x)| < \infty$$

для любых мультииндексов $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..\alpha_n)$, $\beta = (\beta_1, ...\beta_n)$, где $x^\alpha = x_1^{\alpha_1}, ...x_n^{\alpha_n}$.

Дальнейшие свойства многомерного преобразования Фурье сформулируем в форме упражнений.

Задача 7.16. Если $f(x)$ принадлежит пространству $S(\mathbb{R}^n)$, то для преобразования Фурье справедливы операционные соотношения

$$(\mathcal{F}\partial^\alpha f)(y) = (iy)^\alpha(\mathcal{F}f)(y),\ (\partial^\alpha(\mathcal{F}f)(y) = (\mathcal{F}(-ix)^\alpha f)(y).$$

Задача 7.17. Доказать, что одномерное преобразование фурье $\mathcal{F}_{x_j\to y_j}$ взаимно однозначно и взаимно непрерывно отображает $S(\mathbb{R}^n)$ на себя, причем обратное отображение определяется формулой

$$(\mathcal{F}^{-1}g)(y_1, ...x_j, ...y_j) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(y)e^{ix_jy_j}\,dy_j.$$

Задача 7.18. Доказать, что многомерное преобразование Фурье представляется в виде произведения одномерных преобразований:

$$\mathcal{F}_{x\to y} = \mathcal{F}_{x_1\to y_1}\mathcal{F}_{x_2\to y_2}...\mathcal{F}_{x_n\to y_n}$$

и, следовательно, взаимно однозначно и взаимно непрерывно отображает $S(\mathbb{R}^n)$ на себя. Обратное преобразование Фурье определяется формулой

$$(\mathcal{F}^{-1}f)(y) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{i(x,y)}\,dx,$$

Метод композиции можно использовать для определения новых интегральных преобразований в том случае, если часть переменных меняется на положительной полуоси, а оставшаяся часть переменных меняется на всей оси. Ограничимся, например, случаем четверти плоскости. Тогда можно рассмотреть следующие преобразования:

$$\mathcal{F}_{s,x_1\to y_1}\mathcal{F}_{s,x_2\to y_2},\ \mathcal{F}_{c,x_1\to y_1}\mathcal{F}_{s,x_2\to y_2},\ \mathcal{F}_{c,x_1\to y_1}\mathcal{F}_{c,x_2\to y_2}.$$

Задача 7.19. Для введенных преобразований вывести формулы преобразования функции $\triangle f$.

7.6 Применение интегральных преобразований к одномерному уравнению теплопроводности

Уравнение теплопроводности на всей оси

Пример 7.10. *Применяя интегральное преобразование Фурье, решить начальную задачу*

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} \qquad x \in \mathbb{R},\, t > 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x). \end{cases}$$

Решение. Будем предполагать, что $\varphi \in S(\mathbb{R})$. Будем также считать, что задача имеет решение $u(x,t)$, удовлетворяющее условиям u, u_t, u_x, $u_{xx} \in S(\mathbb{R})$ при $t \geq 0$. Данный факт позволяет использовать следующие операционные соотношения

$$\widehat{u_t} = (\widehat{u})_t,\, \widehat{u_{xx}} = \mathcal{F}_{x \to y} u_{xx} = -y^2 \widehat{u}$$

и будет обоснован в процессе решения задачи.

После применения преобразования Фурье устанавливаем, что $\widehat{u}(y,t)$ является решением задачи Коши

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\widehat{u} = -a^2 y^2 \widehat{u} \\ \widehat{u}|_{t=0} = \widehat{\varphi}(y). \end{cases}$$

Применяя метод интегрирующего множителя, устанавливаем, что

$$\frac{d}{dt}(\widehat{u} e^{a^2 y^2 t}) = 0.$$

В результате интегрирования получаем для $\widehat{u}$ следующую формулу

$$\widehat{u}(y,t) = \widehat{\varphi}(y) e^{-a^2 y^2 t}.$$

Из этой формулы в силу сделанных предположений уже следует, что $\widehat{u}(y,t) \in S(\mathbb{R})$ равномерно относительно $t \geq 0$. Тем самым обоснованы предыдущие рассуждения.

Решение исходной задачи получается по формуле обращения преобразования Фурье и имеет вид

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \widehat{\varphi}(y) e^{-a^2 y^2 t} e^{iyx}\, dy. \tag{7.4}$$

Для вывода формулы Пуассона представим $\widehat{\varphi}(y)$ в последней формуле в виде интеграла и изменим порядок интегрирования

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(s) \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2 y^2 t} e^{iy(x-s)}\, dy\, ds.$$

Используя результаты примера 7.3 выводим формулу Пуассона

$$u(x,t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{(x-s)^2}{4a^2 t}}}{2a\sqrt{\pi t}} \varphi(s)\, ds. \tag{7.5}$$

Введем функцию

$$G_0(x,t) = \frac{e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}}}{2a\sqrt{\pi t}}. \tag{7.6}$$

В этих обозначениях формула Пуассона 7.6 записывается в виде

$$u(x,t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G_0(x-s,t) \varphi(s)\, ds. \tag{7.7}$$

Функция $G_0(x-s,t)$ называется ядром Пуассона.

Замечание 7.1. *Каждая из полученных формул имеет свои преимущества. Формула Пуассона позволяет расширить класс начальных данных. Формулу 7.4 можно использовать для исследования асимптотического поведения решения уравнения теплопроводности при* $t \to +\infty$.

Задача 7.20. Установить насколько сильно может расти функция $\varphi(x)$ на бесконечности, чтобы формула Пуассона определяла решение уравнения теплопроводности при $t \leq T$.

Пример 7.11. *Используя формулу 7.4 , исследовать асимптотическое поведение решения уравнения теплопроводности при* $t \to +\infty$.

Решение. Будем считать, что $\varphi(x)$, а, следовательно, и $\widehat{\varphi}(y)$ принадлежат $S(\mathbb{R})$. Сначала отметим очевидный факт, что интеграл

$$I_\delta(t,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{|y|>\delta} \widehat{\varphi}(y) e^{-a^2y^2t}\, e^{iyx}\, dy$$

удовлетворяет оценке

$$I_\delta(t,x) = O(e^{-a^2\delta^2 t}).$$

Поэтому основной вклад в решение $u(t,x)$ при $t \to +\infty$ дает интеграл

$$J_\delta(t,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{|y|<\delta} \widehat{\varphi}(y) e^{-a^2y^2t}\, e^{iyx}\, dy.$$

Считая δ достаточно малым, можно заменить $\widehat{\varphi}(x)$ на ее значение в нуле

$$\widehat{\varphi}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\, dx.$$

Оставшийся интеграл

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{|y|<\delta} e^{-a^2y^2t}\, e^{iyx}\, dy$$

можно заменить интегралом

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2y^2t}\, e^{iyx}\, dy, \tag{7.8}$$

так как разность этих интегралов имеет порядок $O(e^{-a^2\delta^2t})$. В свою очередь, интеграл 7.8, как было установлено в примере 7.10 совпадает с функцией

$$G_0(x,t) = \frac{e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}}{2a\sqrt{\pi t}}.$$

Следовательно, имеет место асимптотическая формула

$$u(x,t) \sim \widehat{\varphi}(0) \frac{e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}}{2a\sqrt{\pi t}}.$$

Конечно, приведенные рассуждения можно признать лишь наводящими соображениями. Однако, в этом направлении можно двигаться дальше. Предварительно заметим, что справедливо равенство

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} y^n e^{-a^2y^2t}\, e^{iyx}\, dy = (-i)^n \frac{d^n}{dx^n}\left\{\frac{e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}}{2a\sqrt{\pi t}}\right\}.$$

Поэтому, заменив функцию $\widehat{\varphi}(y)$ в интеграле 7.4 ее тейлоровским разложением:

$$\widehat{\varphi}(y) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \widehat{\varphi}^{(n)}(0)\frac{y^n}{n!},$$

получаем для $u(x,t)$ следующий асимптотический ряд

$$u(x,t) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \widehat{\varphi}^{(n)}(0)\frac{(-i)^n}{n!}\frac{d^n}{dx^n}\left\{\frac{e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}}{2a\sqrt{\pi t}}\right\}.$$

Приведенный способ асимптотического разложения интегралов носит название метода Лапласа. Его обоснование можно найти во многих книгах. Смотрите, например, М.В. Федорюк. Метод перевала. М.: Наука. 1977.

Задача 7.21. Найти решение уравнения теплопроводности

$$u_t = u_{xx},$$

удовлетворяющее начальному условию $u|_{t=0} = \varphi(x)$, для следующих функций $\varphi(x)$:

$$a).\ e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4\tau}}\ \ \tau > 0,\quad b).\ x^n,\ \ c).\ \sin\alpha x,\ \ d).\ e^{\beta x}\cos\alpha x.$$

Предложить два способа решения: a) с помощью формулы Пуассона, b) использовать другие соображения.

Пример 7.12. *Применяя преобразование Фурье, найти решение неоднородного уравнения теплопроводности*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} + f(x,t)$$

с нулевым начальным условием

$$u|_{t=0} = 0.$$

Решение. Применяя преобразование Фурье к уравнению теплопроводности, получаем следующую задачу Коши

$$\begin{cases} \frac{\partial \widehat{u}}{\partial t} = -a^2 y^2 \widehat{u} + \widehat{f}(y,t) \\ \widehat{u}|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

Ее решение имеет вид

$$\widehat{u}(y,t) = \int\limits_0^t e^{-a^2y^2(t-\tau)} \widehat{f}(y,t)\, dy.$$

Аналогично примеру 7.10 получаем, что

$$\mathcal{F}^{-1}_{y\to x}(e^{-a^2y^2(t-\tau)}\widehat{f}(y,t)) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{(x-s)^2}{4a^2(t-\tau)}}}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} f(s,\tau)\, ds.$$

Поэтому формула Пуассона для решения неоднородного уравнения теплопроводности с нулевым начальным условием имеет вид

$$u(x,t) = \int\limits_0^t \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{(x-s)^2}{4a^2(t-\tau)}}}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} f(s,\tau)\, ds\, d\tau.$$

Задача 7.22. Доказать, что функция

$$G(x,t|s,\tau) = \frac{e^{-\frac{(x-s)^2}{4a^2(t-\tau)}}}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} \tag{7.9}$$

при фиксированных s, τ и при $t > \tau$ удовлетворяет уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial G}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 G}{\partial^2 x}.$$

Не противоречит ли этот факт результату предыдущего примера?

Функция $G(x,t|s,\tau)$, продолженная нулем при $\tau \leq t$, называется фундаментальным решением уравнения теплопроводности.

Пример 7.13. *Применяя преобразование Фурье, доказать, что фундаментальное решение $G(x,t|s,\tau)$ является единственным решением уравнения теплопроводности*

$$\frac{\partial G}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 G}{\partial^2 x} + \delta(x-s)\delta(t-\tau),$$

равным нулю при $t < \tau$.

Решение. Естественно, здесь производные понимаются в смысле обобщенных функций. Достаточно рассмотреть случай $s = 0$. Применяя преобразование Фурье по переменной x приходим к следующему дифференциальному уравнению для $\widehat{G}$:

$$\frac{\partial \widehat{G}}{\partial t} = -a^2 y^2 \widehat{G} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \delta(t-\tau). \tag{7.10}$$

Используя интегрирующий множитель $e^{a^2y^2t}$ приведем уравнение 7.10 к виду

$$\frac{\partial \widehat{G} e^{a^2y^2t}}{\partial t} = \frac{e^{a^2y^2\tau}}{\sqrt{2\pi}} \delta(t-\tau).$$

Учитывая, что $\delta(t-\tau) = \frac{d}{dt}\eta(t-\tau)$, где $\eta(t) = \begin{cases} 1, & \text{при } t > 0, \\ 0, & \text{при } t < 0, \end{cases}$ получаем, что

$$\widehat{G} = \frac{e^{a^2y^2(\tau-t)}}{\sqrt{2\pi}} \eta(t-\tau).$$

После этого применение формулы обращения приводит к нужному результату.

Замечание 7.2. *Теперь можно ответить на вопрос в предыдущем примере следующим образом. Нет, не противоречит. Но нельзя дифференцировать под знаком интеграла в обычном смысле. Дифференцирование в смысле обобщенных функций не приводит к противоречию.*

Замечание 7.3. *Обобщенная функция $\delta(x-s)\delta(t-\tau)$ интерпретируется как мгновенный точечный источник тепла в точке $x = s$, действующий в момент времени $t = \tau$. Поэтому фундаментальное решение называют функцией влияния мгновенного точечного источника, т. е. фундаментальное решение $G(x,t|s,\tau)$ определяет распределение температуры при таком источнике. Представляя источники тепла как суперпозицию точечных источников*

$$f(x,t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-s)\delta(t-\tau) f(s,\tau)\, ds\, d\tau$$

получаем решение как суперпозицию функций влияния с той же плотностью

$$u(x,t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(x,t|s,\tau) f(s,\tau)\, ds\, d\tau.$$

Считая, что источники тепла равны нулю при $t < 0$ и учитывая, что фундаментальное решение равно нулю при $\tau > t$, выводим

$$u(x,t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{0}^{t} G(x,t|s,\tau) f(s,\tau)\, ds\, d\tau.$$

Полученная формула совпадает с формулой Пуассона для решения неоднородного уравнения с нулевым начальным условием. Конечно, приведенные рассуждения носят эвристический характер, но могут быть строго обоснованы в рамках теории обобщенных функций.

Пример 7.14. *Доказать, что ядро Пуассона $G_0(x-s,t)$ при $t > 0$ является решением уравнения теплопроводности*

$$u_t = a^2 u_{xx}$$

с начальным условием

$$u|_{t=0} = \delta(x-s).$$

Решение. Ограничимся доказательством равенства

$$G_0(x-s,0) = \delta(x-s),$$

которое следует понимать в смысле сходимости обобщенных функций

$$\lim_{t\to+0} G_0(x-s,t) = \delta(x-s).$$

Напомним, что последнее означает, что для любой пробной функции $f(x)$ должно выполняться условие

$$\lim_{t\to+0} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G_0(x-s,t) f(s)\, ds = f(x).$$

Но данная формула есть следствие того факта, что интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} G_0(x-s,t)f(s)\,ds$$

является решением однородного уравнения теплопроводности с начальной функцией $f(x)$.

Задача 7.23. Найти формулу Пуассона для общего случая неоднородного уравнения теплопроводности с ненулевым начальным условием.

Задача 7.24. Применить преобразование Фурье к решению уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} + b\frac{\partial u}{\partial x} + cu + f(x,t).$$

Уравнение теплопроводности на полупрямой

Пример 7.15. *Решить начально-краевую задачу*

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} + cu + f(x,t), & 0 < x < +\infty, \\ \frac{\partial u}{\partial x}|_{x=0} = \alpha(t), & u|_{t=0} = \varphi(x). \end{cases}$$

методом интегральных преобразований.

Решение. Сначала выберем тип интегрального преобразования. Из результата примера 7.7 вытекает, что формула cos-преобразования Фурье второй производной содержит граничное значение в нуле лишь первой производной. Поэтому в данном случае следует применять cos-преобразование Фурье.

Далее, задачу удобно разбить на три более простые задачи.

1. Однородное уравнение с однородным граничным условием и заданным начальным условием

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} + cu, & 0 < x < +\infty, \\ \frac{\partial u}{\partial x}|_{x=0} = 0, & u|_{t=0} = \varphi(x); \end{cases}$$

2. неоднородное уравнение с однородными граничным и начальным условиями

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} + cu + f(x,t), & 0 < x < +\infty, \\ \frac{\partial u}{\partial x}|_{x=0} = 0, & u|_{t=0} = 0; \end{cases}$$

3. однородное уравнение с нулевым начальным условием и заданным граничным условием

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} + cu, \quad 0 < x < +\infty, \\ \frac{\partial u}{\partial x}|_{x=0} = \alpha(t), \qquad u|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

После применения cos-преобразования Фурье к каждой из этих задач приходим к следующим задачам для обыкновенных дифференциальных уравнений:

1.
$$\begin{cases} \frac{\partial \widehat{u}}{\partial t} = -a^2 y^2 \widehat{u} + c\widehat{u}, \quad 0 < y < +\infty, \\ \widehat{u}|_{t=0} = \widehat{\varphi}(y). \end{cases}$$

2.
$$\begin{cases} \frac{\partial \widehat{u}}{\partial t} = -a^2 y^2 \widehat{u} + c\widehat{u} + \widehat{f}(y,t), \quad 0 < y < +\infty, \\ \widehat{u}|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

3.
$$\begin{cases} \frac{\partial \widehat{u}}{\partial t} = -a^2 y^2 \widehat{u} + c\widehat{u} - \sqrt{\frac{2}{\pi}}\alpha(t), \quad 0 < y < +\infty, \\ \widehat{u}|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

Каждую из этих задач можно рассматривать как задачу Коши для линейного дифференциального уравнения первого порядка. Обозначив решения соответственно через $\widehat{u}_1$, $\widehat{u}_2$, $\widehat{u}_3$, имеем

1.
$$\widehat{u}_1(y,t) = \widehat{\varphi}(y)\exp\{-a^2 y^2 t + ct\};$$

2.
$$\widehat{u}_2(y,t) = \int\limits_0^t \exp\{(-a^2 y^2 + c)(t-\tau)\}\widehat{f}(y,\tau)\,d\tau;$$

3.
$$\widehat{u}_3(y,t) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^t \exp\{(-a^2 y^2 + c)(t-\tau)\}\alpha(\tau)\,d\tau.$$

Теперь для определения решений $u_1(x,t)\, u_2(x,t)$, $u_3(x,t)$ следует воспользоваться формулой обращения для cos-преобразования Фурье. В результате получим следующие формулы.

1.
$$u_1(x,t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^\infty \widehat{\varphi}(y) \exp\{-a^2y^2t + ct\} \cos yx\, dy; \tag{7.11}$$

2.
$$u_2(x,t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^\infty \int\limits_0^t \exp\{(-a^2y^2 + c)(t-\tau)\} \widehat{f}(y,\tau)\, d\tau \cos yx\, dy; \tag{7.12}$$

3.
$$u_3(x,t) = -\frac{2}{\pi} \int\limits_0^\infty \int\limits_0^t \exp\{(-a^2y^2 + c)(t-\tau)\} \alpha(\tau)\, d\tau \cos yx\, dy; \tag{7.13}$$

Решение исходной задачи является суммой u_j:
$$u(x,t) = u_1(x,t) + u_2(x,t) + u_3(x,t).$$

Пример 7.16. *Используя формулы (7.11) - (7.13), вывести формулы Пуассона.*

Решение. Используем вычисленный в примере 7.8 интеграл
$$I(x,t) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-a^2y^2t} \cos yx\, dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2a\sqrt{t}} e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}.$$

Тогда для $u_3(x,t)$ справедлива формула
$$u_3(x,t) = -\frac{1}{a\sqrt{\pi}} \int\limits_0^t \frac{e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}}}{\sqrt{t-\tau}} e^{c(t-\tau)} \alpha(\tau)\, d\tau. \tag{7.14}$$

Для вычисления $u_1(x,t)$ заменяем $\widehat{\varphi}(y)$ интегралом cos-преобразования Фурье. Возникающий при этом интеграл
$$J(x,s,t) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-a^2y^2t} \cos yx \cos ys\, dy$$

выражается через $I(x,t)$ следующим образом

$$J(x,s,t) = \frac{1}{2}(I(x+s,t) + I(x-s,t)).$$

Поэтому

$$J(x,s,t) = \frac{\sqrt{\pi}}{4a\sqrt{t}}(e^{-\frac{(x+s)^2}{4a^2t}} + e^{-\frac{(x-s)^2}{4a^2t}}).$$

Вследствие этого справедлива формула

$$u_1(x,t) = \frac{e^{ct}}{2a\sqrt{\pi t}} \int\limits_0^\infty \left(e^{-\frac{(x+s)^2}{4a^2t}} + e^{-\frac{(x-s)^2}{4a^2t}} \right) \varphi(s)\, ds. \tag{7.15}$$

Аналогично получаем

$$u_2(x,t) = \int\limits_0^t \frac{e^{c(t-\tau)}}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} \int\limits_0^\infty \left(e^{-\frac{(x+s)^2}{4a^2(t-\tau)}} + e^{-\frac{(x-s)^2}{4a^2(t-\tau)}} \right) f(s,\tau)(s)\, ds\, d\tau. \tag{7.16}$$

Задача 7.25. Решить методом интегральных преобразований следующую начально-краевую задачу

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} + cu + f(x,t), & 0 < x < +\infty, \\ u|_{x=0} = \alpha(t), & u|_{t=0} = \varphi(x). \end{cases}$$

Пример 7.17. *Решить начально-краевую задачу*

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x}, & 0 < x < +\infty, \\ (\frac{\partial u}{\partial x} - \alpha u)|_{x=0} = 0, & u|_{t=0} = \varphi(x). \end{cases}$$

Решение. Из результата задачи 7.15 следует, что нужно применить интегральное преобразование G, определенное в примере 7.9 при $\beta = \alpha$. Применяя указанное преобразование к уравнению теплопроводности и начальному условию, получаем

$$\frac{\partial (Gu)}{\partial t} = -\lambda^2 (Gu), \quad (Gu)|_{t=0} = (G\varphi)(y).$$

В результате интегрирования устанавливаем, что

$$(Gu)(y) = (G\varphi)(y) e^{-\lambda^2 t}.$$

Согласно формуле обращения, установленной в примере 7.9, выводим, что

$$u(x,t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^\infty e^{-\lambda^2 t} (G\varphi)(\lambda) \frac{\lambda \cos \lambda x + \alpha \sin \lambda x}{\lambda^2 + \alpha^2}\, d\lambda.$$

Построение функций влияния точечных источников

Пример 7.18. *Используя метод отражения, найти функцию влияния для уравнения теплопроводности*

$$u_t = u_{xx} + f(x,t)$$

в случае полубесконечного стержня для граничного условия $u|_{x=0} = 0$.

Решение. Функция влияния является решением задачи

$$u_t = u_{xx} + \delta(x-s)\delta(t-\tau),\ \ u|_{x=0} = 0$$

с условием $u = 0$ при $t < \tau$. Согласно методу отражения в случае граничного условия $u|_{x=0} = 0$ следует осуществлять нечетное продолжение на всю вещественную ось. Поэтому на всей вещественной оси следует рассмотреть уравнение теплопроводности с неоднородностью $(\delta(x-s)-\delta(x+s))\delta(t-\tau)$, т.е. к мгновенному точечному источнику, расположенному в точке s добавить отрицательный источник в симметричной точке $-s$. Функция влияния данных источников имеет вид $G(x,t|s,\tau)-G(x,t|-s,\tau)$. Поэтому функция влияния для полуограниченного стержня является ограничением данной функции на область $x > 0,\ \ s > 0$. Следовательно, функция влияния для полуограниченного стержня в случае краевого условия первого типа имеет вид

$$\begin{aligned} G_1(x,t|s,\tau) &= G(x,t|s,\tau) - G(x,t|-s,\tau) = \\ &= \eta(t-\tau)\frac{1}{2\sqrt{\pi(t-\tau)}}\left(e^{-\frac{(x-s)^2}{4(t-\tau)}} - e^{-\frac{(x+s)^2}{4(t-\tau)}}\right). \end{aligned} \tag{7.17}$$

Пример 7.19. *Используя функцию влияния, записать формулу Пуассона для решения начально-краевой задачи для полупрямой* $x > 0$

$$u_t = u_{xx} + f(x,t),\ \ u|_{t=0} = \varphi(x),\ \ u|_{x=0} = 0.$$

Формула Пуассона имеет вид

$$u(x,t) = \int\limits_0^\infty \frac{\varphi(s)}{2\sqrt{\pi t}}(e^{-\frac{(x-s)^2}{4t}} - e^{-\frac{(x+s)^2}{4t}})\,ds +$$

$$+ \int\limits_0^t \int\limits_0^\infty \frac{f(s,\tau)}{2\sqrt{\pi(t-\tau)}}(e^{-\frac{(x-s)^2}{4(t-\tau)}} - e^{-\frac{(x+s)^2}{4(t-\tau)}})\,ds\,dt.$$

Пример 7.20. *Вводя функцию w, "снимающую"неоднородность в краевом условии, найти формулу для решения следующей краевой задачи для полупрямой $x > 0$*

$$u_t = u_{xx},\ u|_{t=0} = 0,\ u|_{x=0} = f(t).$$

Решение. Пусть $w(x,t)$ удовлетворяет условию $w|_{x=0} = f(t)$. Полагая $u = v + w$, получаем для определения v следующую краевую задачу

$$v_t = v_{xx} + (w_{xx} - w_t),\ v|_{x=0} = 0,\ v|_{t=0} = -w|_{t=0}.$$

Используя результат предыдущего примера в сокращенных обозначениях получаем для v формулу

$$v(x,t) = -\int\limits_0^\infty w(s,0)G_1(x,t|s,0)\,ds + \int\limits_0^t \int\limits_0^\infty G_1(x,t|s,\tau)(w_{ss}(s,\tau) - w_\tau(s,\tau))\,ds\,d\tau.$$

Рассмотрим интеграл

$$J_\varepsilon(x,t) = \int\limits_0^{t-\varepsilon} \int\limits_0^\infty G_1(x,t|s,\tau)(w_{ss}(s,\tau) - w_\tau(s,\tau))\,ds\,d\tau.$$

Выполнив интегрирование по частям, получим

$$J_\varepsilon(x,t) = \int\limits_0^{t-\varepsilon} \frac{\partial}{\partial s}G_1(x,t|s,\tau)|_{s=0}\, f(\tau)\,d\tau - \int\limits_0^\infty (G_1(x,t|s,\tau)w(s,\tau))|_{\tau=0}^{t-\varepsilon}\,ds.$$

Предельный переход при $\varepsilon \to +0$ приводит к соотношению

$$\lim_{\varepsilon\to+0} J_\varepsilon(x,t) = \int\limits_0^t \frac{\partial}{\partial s}G_1(x,t|s,\tau)|_{s=0}\, f(\tau)\,d\tau - w(x,t) + \int\limits_0^\infty G_1(x,t|s,0)w(s,0)\,ds.$$

Поэтому для u окончательно получаем формулу

$$u(x,t) = \int_0^t \frac{\partial}{\partial s} G_1(x,t|s,\tau)|_{s=0}\, f(\tau)\, d\tau.$$

Задача 7.26. Определив функцию источника, решить краевую задачу для полупрямой $x > 0$

$$u_t = u_{xx} + f(x,t),\ u_x|_{x=0} = \alpha(t),\ u|_{t=0} = \beta(x).$$

Задача 7.27. Решить краевую задачу для полупрямой $x > 0$

$$u_t = u_{xx} - b^2 e^{-kx},\ u|_{x=0} = U_0 = const,\ u|_{t=0} = 0.$$

Задача 7.28. Решить краевую задачу для полупрямой $x > 0$

$$u_t = u_{xx},\ u_x|_{x=0} = q,\ u|_{t=0} = 0.$$

Пример 7.21. *Найти решение следующей начально-краевой задачи*

$$u_t = u_{xx},\ \ v_0 t < x < +\infty,\ \ u(x,0) = \varphi(x),\ \ u(v_0 t, t) = 0.$$

Решение. Введем новую пространственную переменную $\xi = x - v_0 t,\ 0 < \xi < \infty$ и новую функцию v, полагая

$$u(x,t) = e^{\alpha\xi+\beta t} v(\xi,t).$$

Тогда

$$u_t = e^{\alpha\xi+\beta t}[(\beta - \alpha v_0)v + v_t - v_0 v_\xi],$$

$$u_x = e^{\alpha\xi+\beta t}(\alpha v + v_\xi),$$

$$u_{xx} = e^{\alpha\xi+\beta t}(\alpha^2 v + 2\alpha v|\xi + v_{\xi\xi})$$

и функция $v(\xi,t)$ удовлетворяет уравнению

$$v_t = v_{\xi\xi} + (2\alpha + v_0)v_\xi + (\alpha^2 - \beta + \alpha v_0)v.$$

Положив $\alpha = -v_0/2,\ \ \beta = -v_0^2/4$, приведем его к виду

$$v_t = v_{\xi\xi},$$

причем функция v должна удовлетворять условиям

$$v|_{t=0} = \varphi(\xi)e^{(v_0\xi/2)},\ v|_{\xi=0} = 0.$$

Используя результат предыдущего примера, получаем

$$v(\xi,t) = \int\limits_0^\infty \frac{e^{(v_0 s/2)}\varphi(s)}{2\sqrt{\pi t}}(e^{-\frac{(\xi-s)^2}{4t}} - e^{-\frac{(\xi+s)^2}{4t}})\,ds.$$

Возвращаясь к старой функции и старой пространственной переменной, имеем

$$u(x,t) = e^{(v_0^2 t - 2v_0 x)/4}\int\limits_0^\infty \frac{e^{(v_0 s/2)}\varphi(s)}{2\sqrt{\pi t}}\left(e^{-\frac{(x-v_0 t-s)^2}{4t}} - e^{-\frac{(x-v_0 t+s)^2}{4t}}\right)ds.$$

Пример 7.22. *Используя метод отражения, выразить ядро Пуассона для уравнения теплопроводности на отрезке* $(0,l)$ *с краевыми условиями типа (1,2) в терминах ядра Пуассона для всей оси.*

Решение. Согласно методу отражения нужно начальную функцию четным образом продолжить через точку $x = l$ и затем нечетным образом через точку $x = 0$. После этого нужно осуществить $4l-$периодическое продолжение на всю вещественную ось. Так как ядро Пуассона $P_{12}(x,s,t)$ является решением уравнения теплопроводности

$$u_t = u_{xx}$$

с начальным условием

$$u|_{t=0} = \delta(x-s),$$

то нужно рассмотреть на всей оси уравнение теплопроводности с начальным условием

$$u|_{t=0} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}(\delta(x-s+4kl)-\delta(x+s+4kl)+\delta(x+s-2l+4kl)-\delta(x-s+2l+4kl)).$$

Ядро Пуассона $P_{12}(x,s,t)$ является ограничением на отрезок решения для всей оси с данным начальным условием. Поэтому справедлива формула

$$P_{12}(x,s,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(e^{-\frac{(x-s+4kl)^2}{4t}} - e^{-\frac{(x+s+4kl)^2}{4t}} + e^{-\frac{(x+s-2l+4kl)^2}{4t}} - e^{-\frac{(x-s+2l+4kl)^2}{4t}}).$$

Замечание 7.4. *В отличие от полученных ранее формул для ядер Пуассона данная формула удобна при малых t ввиду быстрого убывания членов ряда.*

Задача 7.29. Выразить ядра Пуассона для уравнения теплопроводности на отрезке $(0.l)$ с краевыми условиями типа (1,1), (2,1) или (2,2) в терминах ядра Пуассона для всей оси.

Задача 7.30. Решить краевую задачу

$$u_t = u_{xx}, \quad v_0 t < x < \infty,\ t > 0$$
$$u|_{t=0} = 0,\ \ u(v_0 t, t) = \mu(t).$$

7.7 Применение интегральных преобразований к многомерному уравнению теплопроводности

Пример 7.23. *Найти распределение температуры во всем пространстве $\mathbb{R}^3$, если начальная температура определяется соотношением $u|_{t=0} = f(x,y,z)$. Рассмотреть случай, когда начальная функция не зависит от z.*

Решение. Для вывода формулы Пуассона предполагаем, что $f \in S(\mathbb{R}^n)$. Применение интегрального преобразования Фурье $\mathcal{F}_{(x,y,z)\to(\alpha,\beta,\gamma)}$ к начальной задаче для уравнения теплопроводности

$$u_t = \triangle u,\ u|_{t=0} = f(x,y,z)$$

приводит к задаче Коши

$$\widehat{u}|_t = -(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\widehat{u},\ \ \widehat{u}|_{t=0} = \widehat{f}(\alpha,\beta,\gamma).$$

Ее решение имеет вид

$$\widehat{u} = \widehat{f}(\alpha,\beta,\gamma)e^{-(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)t}.$$

Ясно, что $\widehat{u} \in S(\mathbb{R}^n)$ при любом $t \geq 0$.

Вследствие формулы обращения получаем

$$u(x,y,z,t)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\widehat{f}(\alpha,\beta,\gamma)e^{-(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)t}e^{i(x\alpha+y\beta+z\gamma)}\,d\alpha\,d\beta\,d\gamma.$$

Заменяя в этой формуле $\widehat{f}$ интегралом, приходим к следующей формуле

$$u(x,y,z,t)=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(\xi,\eta,\zeta)\times$$

$$\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)t}e^{i((x-\xi)\alpha+(y-\eta)\beta+(z-\zeta)\gamma)}\,d\alpha\,d\beta\,d\gamma\right)d\xi\,d\eta\,d\zeta.$$

Внутренний трехмерный интеграл является произведением трех известных одномерных интегралов:

$$\frac{1}{(2\pi)^3}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)t}e^{i((x-\xi)\alpha+(y-\eta)\beta+(z-\zeta)\gamma)}\,d\alpha\,d\beta\,d\gamma=\frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}{4t}}}{(2\sqrt{\pi t})^3}.$$

Поэтому окончательно приходим к формуле Пуассона

$$u(x,y,z,t)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(\xi,\eta,\zeta)\frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}{4t}}}{(2\sqrt{\pi t})^3}\,d\xi\,d\eta\,d\zeta.$$

Если начальная функция не зависит от z, то и решение не зависит от z. Поэтому следует применять двумерное преобразование Фурье. Распределение температуры в этом случае определяется формулой

$$u(x,y,t)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(\xi,\eta)\frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{4t}}}{4\pi t}\,d\xi\,d\eta.$$

Пример 7.24. *В пространстве $\mathbb{R}^3$ действуют источники с плотностью $g(x,y,z,t)$, а начальная температура равна нулю. Найти распределение температуры.*

Решение. Применение трехмерного преобразования Фурье приводит к задаче Коши

$$\widehat{u}_t=-(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\widehat{u}+\widehat{g}(\alpha,\beta,\gamma,t),\ \widehat{u}|_{t=0}=0.$$

Ее решение имеет вид

$$\widehat{u}(\alpha,\beta,\gamma,t)=\int\limits_0^t e^{-(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(t-\tau)}\widehat{g}(\alpha,\beta,\gamma,\tau)\,d\tau.$$

В результате, действуя аналогично предыдущему примеру, получаем формулу Пуассона для данного случая

$$u(x,y,z,t)=\int\limits_0^t\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(\xi,\eta,\zeta,\tau)\frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}{4(t-\tau)}}}{(2\sqrt{\pi(t-\tau)})^3}\,d\xi\,d\eta\,d\zeta\,d\tau.$$

Задача 7.31. Найти решение следующей начальной задачи во всем пространстве

$$u_t=\triangle u+(a_1\partial_1+a_2\partial_2+a_3\partial_3)u+bu,\ u_{t=0}=f(x_1,x_2,x_3).$$

Пример 7.25. *Решить краевую задачу для полупространства* $z>0$

$$u_t=\triangle u,\ u|_{z=0}=f(x,y,t),\ u|_{t=0}=0.$$

Решение. Будем применять следующее интегральное преобразование $\mathcal{F}_{x\to\alpha}\mathcal{F}_{y\to\beta}\mathcal{F}_{s,z\to\gamma}$, т.е. sin-преобразование Фурье по переменной z и экспоненциальное преобразование Фурье по остальным переменным. В результате получим следующую задачу Коши

$$\widehat{u}_t=-(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\widehat{u}+\sqrt{\frac{2}{/\pi}}\,\gamma\widehat{f}(\alpha,\beta,t).$$

Ее решение имеет вид

$$\widehat{u}(\alpha,\beta,\gamma,t)=\int\limits_0^t e^{-(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(t-\tau)}\sqrt{\frac{2}{/\pi}}\,\gamma\widehat{f}(\alpha,\beta,\tau)\,d\tau.$$

Используя формулы обращения интегральных преобразований и выражая $\widehat{f}$ в форме интеграла, приходим к следующей формуле

$$u(x,y,z,t)=\frac{1}{2\pi^3}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_0^t f(\xi,\eta,\tau)\times$$

$$\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(t-\tau)}\gamma\sin\gamma z\, e^{i\alpha(x-\xi)+i\beta(y-\eta)}\,d\alpha\,d\beta\,d\gamma\right)\,d\tau\,d\xi\,d\eta$$

Теперь заметим, что внутренний трехмерный интеграл является произведением трех известных одномерных интегралов. Поэтому окончательная формула имеет вид

$$u(x,y,z,t)=\frac{z}{(2\sqrt{\pi})^3}\int_0^t\frac{d\tau}{(t-\tau)^{5/2}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+z^2}{4(t-\tau)}}f(\xi,\eta,\tau)\,d\xi\,d\eta\,d\tau.$$

Задача 7.32. Решить краевую задачу для полупространства $z>0$:

$$u_t=\triangle u,\ u|_{t=0}=f(x,y,z),\ u|_{z=0}=0.$$

Задача 7.33. Решить краевую задачу для полупространства $z>0$:

$$u_t=\triangle u+g(x,y,z,t),\ u|_{t=0}=f(x,y,z),\ u|_{z=0}=0.$$

Задача 7.34. Решить краевую задачу для полупространства $z>0$:

$$u_t=\triangle u,\ u|_{t=0}=f(x,y,z),\ u_z|_{z=0}=0.$$

Задача 7.35. Решить краевую задачу для полупространства $z>0$:

$$u_t=\triangle u+g(x,y,z,t),\ u|_{t=0}=f(x,y,z),\ u_z|_{z=0}=h(x,y,t).$$

Пример 7.26. *Пусть D – область вида*

$$D=\{(x,y,z);\,0<x<a,\,0<y<b,\,0<z<\infty\}=(0,a)\times(0,b)\times(0,\infty).$$

В области D решить краевую задачу

$$u_t=\triangle u,\ u|_{t=0}=f(x,y,z),\ u|_{\partial D}=0.$$

Решение. Применение sin-преобразования Фурье по переменной z приводит к следующей краевой задаче для $\widehat{u}(x,y,\zeta,t)=(\mathcal{F}_s u)(x,y,\zeta,t)$:

$$\widehat{u}_t=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\widehat{u}-\zeta^2\widehat{u},\ \ (x,y)\in G=(0,a)\times(0,b),\ \ \widehat{u}|_{\partial G}=0,\ \ \widehat{u}|_{t=0}=\widehat{f}(x,y,\zeta).$$

Осуществив замену $\widehat{u} = ve^{-\zeta^2 t}$, сведем ее к новой краевой задаче для v:

$$v_t = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) v,\ (x, y) \in G = (0, a) \times (0, b),\ v|_{\partial G} = 0,\ v_{t=0} = \widehat{f}(x, y, \zeta).$$

Ядро Пуассона для данной задачи имеет вид

$$P(x, y, \xi, \eta, t) = \frac{4}{ab} \sum_{k,l=1}^{\infty} \sin\frac{k\pi x}{a} \sin\frac{k\pi\xi}{a} \sin\frac{l\pi y}{b} \sin\frac{l\pi y}{b} e^{-(\frac{(k\pi)^2}{a^2} + \frac{(l\pi)^2}{b^2})t}.$$

Поэтому функция v определяется формулой

$$v(x, y, \zeta, t) = \int_G\int P(x, y, \xi, \eta, t)\widehat{f}(\xi, \eta, \zeta)\, d\xi\, d\eta.$$

После этого для получения решения исходной задачи следует применить к функции $e^{-\zeta^2 t} v$ sin-преобразование Фурье по переменной ζ. Используя известный интеграл

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} e^{-\zeta^2 t} \sin z\zeta \sin s\zeta\, d\zeta = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}(e^{-\frac{(z-s)^2}{4t}} - e^{-\frac{(z+s)^2}{4t}}),$$

для u получаем следующую формулу

$$u(x, y, z, t) = \int_0^{\infty}\int_G\int P(x, y, \xi, \eta, t) f(\xi, \eta, s) \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}(e^{-\frac{(z-s)^2}{4t}} - e^{-\frac{(z+s)^2}{4t}})\, d\xi\, d\eta\, ds.$$

Задача 7.36. Найти температуру неограниченной балки прямоугольного сечения при заданной начальной температуре, если на ее поверхности

а) поддерживается нулевая температура;

б) имеет место тепловая изоляция.

Задача 7.37. Рассмотреть задачу, аналогичную предыдущей для полуограниченной балки, когда боковой торец теплоизолирован, а грани поддерживаются при постоянной температуре.

Для областей с геометрией, допускающей разделение переменных, наиболее простым способом решения краевых задач является построение ядер Пуассона (функций Грина). Проиллюстрируем этот подход на примере краевой задачи для уравнения теплопроводности в случае полуполосы $D = \{(x, y);\ x \in (0, a),\ y \in (0, \infty\}$.

Пример 7.27. *Построить ядро Пуассона для уравнения*

$$u_t = \triangle u$$

в полуполосе D в случае краевых условий

$$u_y|_{y=0} = 0,\ u|_{x=0} = 0,\ u_x|_{x=a} = 0.$$

Решение. Сначала отметим следующий факт: если начальное условие имеет вид

$$u|_{t=0} = f(x)g(y),$$

то решение $u(x, y, t)$ является произведением решений $v(x, t)$ и $w(y, t)$ следующих краевых задач:

задачи для отрезка $(0, 1)$

$$v_t = v_{xx},\ v_{x=0} = 0,\ v_x|_{x=a} = 0,\ v|_{t=0} = f(x)$$

и задачи для полуоси $(0, \infty)$

$$w_t = w_{yy},\ w_y|_{y=0} = 0.$$

Отсюда сразу же следует, что ядро Пуассона $P(x, y, \xi, \eta, t)$ исходной задачи является произведением ядер Пуассона $P_{12}(x, \xi, t)$ для отрезка $[0, a]$ и $P_2(y, \eta, t)$ для полуоси $(0, \infty)$. Из предыдущих рассмотрений известно, что

$$P_{12}(x, \xi, t) = \frac{2}{a}\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{(2n-1)\pi x}{2a} \sin\frac{(2n-1)\pi\xi}{2a} e^{-\frac{((2n-1)\pi)^2}{4a^2}t},$$

$$P_2(y, \eta, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\left(e^{-\frac{(y-\eta)^2}{4t}} + e^{-\frac{(y+\eta)^2}{4t}}\right).$$

Задача 7.38. В условиях предыдущей задачи записать формулу Пуассона для решения в случае произвольных источников тепла и начальной температуры.

Еще одна вариация на эту же тему.

Пример 7.28. *Найти функцию Грина для уравнения теплопроводности в слое $D = \mathbb{R}^2 \times (0, a)$ в случае граничных условий $u|_{z=0} = 0$, $u_z|_{z=a} = 0$. Записать общую формулу Пуассона для произвольных начальной функции $f(x, y, z)$ и плотности тепловых источников $g(x, y, z, t)$.*

Решение. Функция Грина является произведением функции Грина для пространства $\mathbb{R}^2$:

$$G_2(x,y,\xi,\eta,t,\tau) = \begin{cases} \frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{4(t-\tau)}}}{4\pi(t-\tau)}, & t>\tau \\ 0, & t<\tau \end{cases}$$

и функции Грина для отрезка

$$G_{12}(z,\zeta,t,\tau) = \begin{cases} P_{12}(z,\zeta,t-\tau), & t>\tau \\ 0, & t<\tau \end{cases},$$

где

$$P_{12}(z,\zeta,t) = \frac{2}{a}\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{(2n-1)\pi z}{2a} \sin\frac{(2n-1)\pi\eta}{2a} e^{-\frac{(2n-1)^2\pi^2}{4a^2}t}$$

– ядро Пуассона для отрезка.

Общая формула Пуассона имеет вид

$$u(x,y,z,t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{0}^{a} G_2(x,y,\xi,\eta,t,0)G_{12}(z,\zeta,t,0)f(\xi,\eta,\zeta)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta +$$

$$+\int\limits_{0}^{t}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{0}^{a} G_2(x,y,\xi,\eta,t,\tau)G_{12}(z,\zeta,t,\tau)g(\xi,\eta,\zeta,\tau)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta\,d\tau.$$

Задача 7.39. Найти распределение температуры в слое с теплоизолированной границей для произвольных начальной температуре и плотности тепловых источников.

Литература

[1] *В. И. Арнольд.* Лекции об уравнениях с частными производными. М.: Фазис, 1997. - 175 с.

[2] *А. В. Бицадзе, Д. Ф. Калиниченко.* Сборник задач по уравнениям математической физики. М.: Наука, 1977. - 223 с.

[3] *Б. М. Будак, А. А. Самарский, А. Н. Тихонов.* Сборник задач по математической физике. М.: ГИТТЛ, 1965. - 683 с.

[4] *В. С. Владимиров.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1988. - 512 с.

[5] Сборник задач по уравнениям математической физики(под редакцией В. С. Владимирова). М.: Наука, 1982. - 256 с.

[6] *Ю. С. Очан.* Сборник задач по методам математической физики. М.: Наука, 1973. - 123 с.

[7] *Р. Рихтмайер.* Принципы современной математической физики. М.: Мир, 1982. - 488 с.

[8] *И. Снеддон.* Преобразование Фурье. М.: И.Л., 1955. - 667 с.

[9] *С. Л. Соболев.* Уравнения математической физики. М.: ГИТТЛ, 1966. - 444 с.

[10] *Е. Титмарш.* Введение в теорию интегралов Фурье. М.-Л.: ГИТТЛ, 1948. - 479 с.

[11] *А. Н. Тихонов, А. А. Самарский.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977. - 736 с.

[12] *М. А. Шубин.* Лекции об уравнениях математической физики. М.: МЦНМО, 2003. - 304 с.

[13] *В. И. Юдович.* Лекции об уравнениях математической физики. Часть I. Ростов-на-Дону: Экспертное бюро, 1998. - 240 с.

[14] *В. И. Юдович.* Лекции об уравнениях математической физики. Часть 2. Ростов-на-Дону: Экспертное бюро, 1998. - 255 с.